Black Sea Technical University, Department of Geodesy

Monograph No 1

# TOPOGRAPHIC - ISOSTATIC DEFLECTION OF VERTICAL

## (Definition and Related Integral Formulas)

Dr Onur GÜRKAN

Trabzon (Turkey) 1977

KTÜ, Jeodezi ve Fotogrametri Bölümü

Monograf No 1

# TOPOĞRAFİK - İZOSTATİK ÇEKÜL SAPMASI

## (Kavram ve İlgili İntegral Formülleri)

Dr Onur GÜRKAN

Trabzon 1977

# Ö N S Ö Z

Türkiye I. derece triyangülasyon ağı 7. poligonunda yapılmakta olan araştırmanın en yüklü kesimini çok sayıda kişinin sabırlı ve titiz emeğini gerektiren topoğrafik-izostatik çekül sapmalarının hesabı oluşturmaktadır. Eğer ortalama yükseklik ve derinlik tahminlerinin yanı sıra kendisi de bir araştırma biçiminde ele alınırsa, bir noktadaki işin miktarı bir öğrencinin bölümdeki eğitimi sırasında yaptığı bitirme ödevindekini aşmaktadır.

Konuda bitirme ödevi yapmaya istekli öğrencilere Türkçe'de kuramsal bir yol gösterici olarak hazırlanan bu ilk çoğaltmada ilgili temel kavramlar özetlenmiş ve fiziksel jeodezi derslerinde zaman darlığı nedeniyle inilemiyen gerekli ayrıntılar verilmiştir. İçerik saptanırken ve ayrıntıların açıklanmasında derinliğe inilirken öğrencinin yapacağı çalışmada kuramsal ufkunu genişletmesine, bilimde bilinçli düşünme yeteneğini geliştirmesine, v.b. yardımcı olmak gibi eğitsel bir amaç güdülmüştür.

Uygulama sonuçları ortaya çıktıkça eldeki bu karalamanın içeriğinin ve açıklamalardaki derinliğin gelişeceği ve eğitsel amaçtan beklenenlerin gerçekleşme oranının başka konularda daha iyi yol göstericiler hazırlamakta kullanılabileceği umulmaktadır.

KTÜ/Trabzon Onur GÜRKAN

Mayıs/1977

# P R E F A C E

The most laborious part of the investigation being carried out on 7$^{th}$ loop of Turkish 1$^{st}$ order triangulation net is the calculation of topographic-isostatic deflections of vertical which requires a great number of personnel working patiently and carefully. If it is treated as an independent research besides the estimation of mean heights and depths, the amount of the work for one point exceeds that of a final homework done independently by a student during his study in the department.

This treatise is made ready as a theoretical guide in Turkish for students who are willing to study on the subject for their final homework. It summarizes the relevant fundamental definitions and gives necessary details which could not be discussed in physical geodesy classes because of time limitation. Contents are fixed and expositions of details are extended according to an educational aim such as to help student to broaden his theoretical scope in doing his homework, to improve his mind in thinking consiously in science, etc.

As the results of applications come out it is hoped that the contents and the extension of expositions of the scriptum at hand will develop, and that the comparisons of realized items set up for educational aim may be used in preparing better guides on other subjects.

Black Sea Technical University
Trabzon/Turkey

Onur GÜRKAN

May/1977

# İ Ç İ N D E K İ L E R

C O N T E N T S

## 1 - G i r i ş :

Deniz seviyesinin üzerindeki engebeler traş edilirse, yeryuvarının şekli ilk bakışta bir küreyi andırır. Ancak kuramsal bir incelemenin ilk verileriyle bile bu şeklin dönel elipsoide yakın olduğu söylenebilir. Oysa, gerçekci ve ayrıntılı incelemeler ve ölçülere dayanan araştırmalar bunun **jeoid** adı verilen kendine özgü özel bir şekil olduğunu ortaya koyar.

Mekanik, dinamik ve potansiyel kuramı ilkeleriyle tanımlanan jeoid ise kaynağı yeryuvarının kitleleri ve yeryuvarının kendi ekseni etrafında dönme hareketi olan gerçek gravite alanının eşpotansiyelli yüzeylerinden özel bir tanesidir. Denizleri oluşturan kitleler (su) akışkan olduğundan, bunların sınırı (durgun deniz yüzü) diğer gök cisimlerinin kitlelerinin çekimi ve yeryuvarının uzaydaki diğer hareketlerinin etkisi nedeniyle düzeltildikten sonra jeoidin doğa içinde elle tutulur, gözle görünür kesimini oluşturur.

Bilindiği üzere herhangi bir birim kitleye etki eden diğer tüm kitlelerin uygulayacağı çekim kuvveti ve onun potansiyeli, kitle yoğunluklarının bir fonksiyonudur. Dolu bir cisim olduğu varsayılan yeryuvarının gerçek gravite alanına ilişkin potansiyel fonksiyonu

$$V(X,Y,Z) = k \iiint_{v} \frac{\rho}{\ell}\, dv \qquad (1.1)$$

biçimindedir. Bu eşitlikteki

| | |
|---|---|
| $k$ | : Newton çekim sabiti, |
| $v$ | : Yeryuvarını oluşturan tüm kitlelerin hacmi, |
| $dv = dX' \cdot dY' \cdot dZ'$ | : Koordinatları $X', Y', Z'$ olan hacim elemanı, |
| $\rho = \rho(X', Y', Z')$ | : Koordinatları $X', Y', Z'$ olan hacim elemanında kitle yoğunluğu, |

$\ell^2 = (X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2$ : Koordinatları X,Y,Z olan birim kitle ile koordinatları X',Y',Z' olan hacim elemanı arasındaki doğrusal uzaklık

olarak belirlidir. Hemen görülebileceği gibi yoğunluk, konuma bağlı kesiksiz bir fonksiyon olarak tanımlanabilirse V çekim potansiyeli de konuma bağlı kesiksiz bir fonksiyon olarak tanımlanabilir.

Yukarıda geçen koordinat sisteminin başlangıcı yeryuvarının ağırlık merkezi ve Z ekseni de yeryuvarının dönme ekseni olarak seçilirse, yeryuvarının kendi ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşacak merkezkaç kuvvetin potansiyeli $\Phi$, koordinatları X,Y,Z olan birim kitlenin bulunduğu yerde

$$\Phi = \Phi(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2) \qquad (1.2)$$

eşitliği ile belirlidir. Burada $\omega$, yeryuvarının kendi ekseni etrafında dönüşünün açısal hızıdır.

Böylece gerçek gravite alanının potansiyel fonksiyonu W

$$W = W(X,Y,Z) = V(X,Y,Z) + \Phi(X,Y,Z) \qquad (1.3)$$

ile belirli olur. Yoğunluk dağılımı fonksiyonu

$$\rho = \rho(X,Y,Z) \qquad (1.4)$$

kesiksiz bir fonksiyon olarak varsayılırsa uzayda her nokta için skalar bir büyüklük olan W bulunur. Uzayda W potansiyel sayıları eşit olan noktaların geometrik yeri

$$W = W(X,Y,Z) = \text{sabit} \qquad (1.5)$$

denklemiyle belirli, kapalı olduğu varsayılan bir yüzeydir. Gerçek gravite alanının sonsuz sayıdaki bu eşpotansiyelli yüzeylerinden herbirine JEOPOTANSİYEL YÜZEY ya da kısaca

JEOP denir. Bunlardan her hangi birisinin her hangi bir noktasındaki $\vec{g}$ gerçek gravite vektörü

$$\vec{g} = \text{grad } W = \left(\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}\right) \qquad (1.6)$$

olarak bulunur. Yeryuvarını oluşturan kitlelerin dışında ve yeryüzüne yakın yerlerde bu vektörün doğrultusu ve yönü yüzeyin iç normali ile özdeştir.

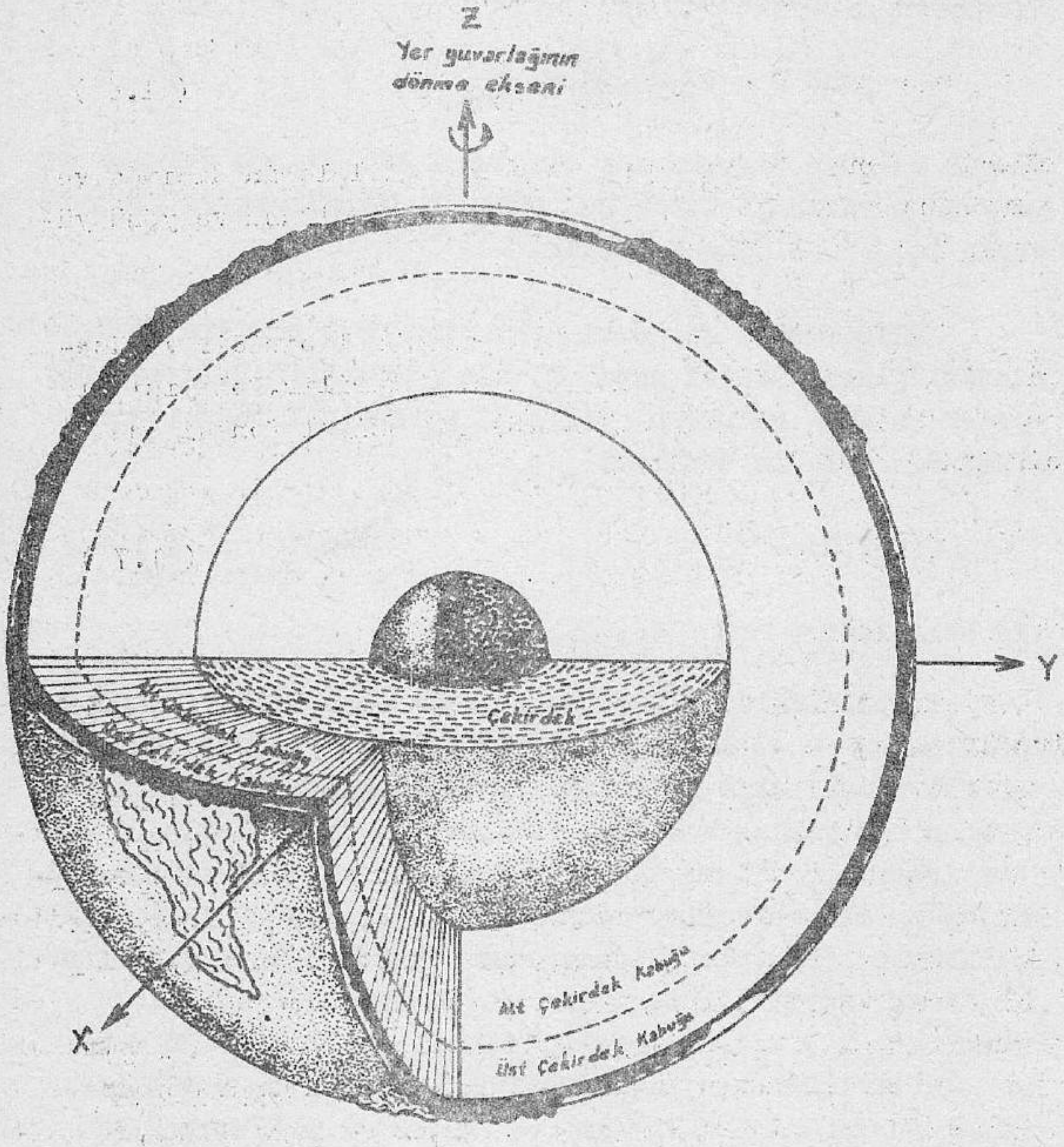
JEOİD, sonsuz sayıdaki jeoplardan özel biridir ve üzerindeki jeopotansiyel sayı $W_o$ ile gösterilir. Dolayısı ile gerçek gravite alanının $W(X,Y,Z)$ potansiyel fonksiyonu cinsinden jeoidin denklemi

$$W(X,Y,Z) = W_o \qquad (1.7)$$

ile belirlidir.

Yerbilimlerinin çeşitli dallarında yapılan kuramsal incelemeler ve gözlemlere dayanan araştırmalar yeryüzünden derinlere inildikçe yoğunluğun arttığını göstermektedir. Buradan bir yaklaşım olarak "Yeryuvarı, eşyoğunluklu kitleleri içeren sınırları küre yüzüne yakın biçemli iç içe katmanlardan oluşmaktadır." denebilir. Bu katmanlar çeşitli özellikleri bir arada bulunduracak biçimde kabaca sınıflandırılırsa Şekil 1.1 deki görünüm ortaya çıkar. En dışta yoğunluğu 2,5 - 2,8 $gr/cm^3$, kalınlığı yaklaşık 30 - 60 km dolaylarında olan katı YERKABUĞU vardır. Bunun altında, yoğunluğu 3,3 - 5,6 $gr/cm^3$ ve kalınlığı yaklaşık 2900 km olan genellikle sıvı kitlelerden oluşan ÇEKİRDEK KABUĞU yer alır. En içte ise, yarıçapı 3400 km dolaylarında yaklaşık bir küre biçiminde ve dış tarafları sıvı, merkezi ve merkeze yakın yerleri katı olduğu sanılan, yoğunluğu 9,7 - 12,0 $gr/cm^3$ olan ÇEKİRDEK bulunur. Bu görünüm daha incelikle ele alındığında, aynı yoğunluklu nokta kitlelerin geometrik yeri, yukarıda anılan koordinat sistemine göre,

$$\rho = \rho(X,Y,Z) = \text{sabit} \qquad (1.8)$$




Şekil 1.1

Yeryuvarının iç yapısı

biçimindeki bir yüzey denklemi ile belirlidir.Sonsuz sayıdaki bu eş yoğunluk yüzeyleri yine bir ilk yaklaşım olarak

$$\rho_r = \rho(r) = \text{sabit} \qquad (1.9)$$

biçiminde küre denklemleri olarak düşünülebilir.Burada r, merkezleri yeryuvarının ağırlık merkezinde olan kürelerin yarıçapları; $\rho_r$, r yarıçaplı kürenin yüzeyini oluşturan dM nokta kitlelerin sabit olan yoğunluğudur.Çeşitli araştırmacılara göre r yarıçapı ile $\rho_r$ yoğunluğu arasındaki sayısal ilişki Çizelge 1.1 de özet olarak görülmektedir.Bu araştırmalardan birisine ait daha ayrıntılı bilgileri içeren Çizelge 1.2 hem yüzeyin yoğunluğu hem de böylesi bir yoğunluk dağılımına göre bu yüzey üzerinde olması gereken çekim kuvveti (gravite eksi merkezkaç kuvvet) ve basıncı vermektedir.

Merkezkaç kuvvetin Z ekseninden bağımsız olduğu gerçeği,eşyoğunluk yüzeyleri birer küre olsa bile eşpotansiyelli yüzeylerin küreden farklı birer dönel yüzey biçiminde olması gerektiğini vurgular.Ayrıca,yeryuvarının kendi ekseni etrafında dönmesi ve yeryuvarı kitlelerinin büyük bir kesiminin sıvı olması nedeniyle,eşyoğunluk yüzeylerinin de küreden farklı eksene göre simetrik dönel birer yüzey olabileceği savı kolaylıkla yadsınamaz.Yoğunluk dağılımıyla ilgili bu varsayımlardan hareketle yeryuvarının gerçek gravite alanına bir yaklaşım olmak üzere düşünsel bir standart gravite alanı ortaya konur.Bu düşünsel alanda her jeopa karşılık bir eşpotansiyelli yüzey vardır ve buna SFEROPOTANSİYEL YÜZEY ya da kısaca SFEROP denir.Birbirinin karşılığı olan bir jeop ile bir sferop farklı geometrik şekiller olmasına karşılık üzerlerindeki jeopotansiyel sayı aynıdır.Özel bir sferop olan ORTALAMA YER ELİPSOİD'i ya da REFERANS ELİPSOİD'i jeoid özel adıyla bilinen jeopun karşılığıdır.

Standart gravite alanının potansiyel fonksiyonu da

$$U = U(X,Y,Z) \qquad (1.10)$$

ile belirlidir.Geometrik şekli dönel yüzey olan bir sfe-

| Derinlik (km) | Yarıçap (km) | Yoğunluk $\rho_r = \rho(r)$ gr/cm$^3$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Bullard | | Landisman et al | | Bullen | |
| d | r | 1957a | 1957b | 1964a | 1964c | 1953a | 1953b |
| Yerkabuğu | | | | | | | |
| 0 | 6370 | 2,84 | 2,84 | 2,84 | 2,84 | 2,84 | 2,84 |
| 32 | 6338 | 2,84 | 2,84 | 2,84 | 2,84 | 2,84 | 2,84 |
| Çekirdek Kabuğu | | | | | | | |
| 32 | 6338 | 3,67 | 3,32 | 3,32 | 3,32 | 3,32 | 3,32 |
| 100 | 6270 | 3,74 | 3,38 | 3,34 | 3,34 | 3,38 | 3,88 |
| 200 | 6170 | 3,83 | 3,46 | 3,42 | 3,40 | 3,47 | 3,94 |
| 300 | 6070 | 3,92 | 3,55 | 3,53 | 3,49 | 3,55 | 4,00 |
| 400 | 5970 | 4,07 | 3,63 | 3,69 | 3,65 | 3,65 | 4,06 |
| 500 | 5870 | 4,08 | 3,70 | 3,85 | 3,85 | 3,87 | 4,07 |
| 700 | 5670 | 4,21 | 3.81 | 4,18 | 4,18 | 4,30 | - |
| 1000 | 5370 | 4,40 | 4,97 | 4,61 | 4,61 | 4,65 | 4,41 |
| 1300 | 5070 | 4,67 | 5,18 | 4,98 | 4,98 | 4,83 | - |
| 1600 | 4770 | 4,72 | 5,36 | 5,08 | 5,08 | 5,00 | 4,74 |
| 2000 | 4370 | 4,92 | 5,59 | 5,08 | 5,08 | 5,22 | 4,94 |
| 2400 | 3970 | 5,11 | 5,80 | 5,08 | 5,08 | 5,42 | 5,13 |
| 2800 | 3570 | 5,30 | 6,00 | 5,08 | 5,08 | 5,61 | 5,42 |
| 2900 | 3470 | 5,36 | 6,06 | 5,26 | 5,24 | 5,66 | 5,57 |
| Çekirdek | | | | | | | |
| 2900 | 3470 | 10,06 | 9,34 | 9,92 | 10,06 | 9,70 | 9,74 |
| 3600 | 2970 | 11,06 | 10,19 | 10,90 | 11,06 | 10,62 | 10,72 |
| 5120 | 1250 | 12,35 | 11,27 | 12,27 | 12,35 | 11,97 | 15,00 |
| 6370 | 0 | 12,63 | 11,51 | 15,42 | 12,63 | 12,30 | 17,90 |

ÇİZELGE 1.1

**Çeşitli yazarlara göre yeryuvarı kitlelerinde derinliğin(yarıçapın) fonksiyonu olarak yoğunluk** [MacDONALD,G.J.F.(1964)'den **özetlenerek çıkartılmıştır**].

| Derinlik (km) d | Yarıçap (km) r | Yoğunluk (gr/cm$^3$) $\rho_r = \rho(r)$ | Çekim (cm/s$^2$) $Ç_r = Ç(r)$ | Basınç ($10^6$·bar) $p_r = p(r)$ |
|---|---|---|---|---|
| Yerkabuğu | | | | |
| 0 | 6371 | 2,76 | 980 | 0,000 |
| 33 | 6338 | 2,82 | 983 | 0,009 |
| Çekirdek Kabuğu | | | | |
| 33 | 6338 | 3,32 | 983 | 0,009 |
| 80 | 6291 | 3,36 | 984 | 0,025 |
| 80 | 6291 | 3,87 | 984 | 0,025 |
| 200 | 6171 | 3,94 | 983 | 0,071 |
| 400 | 5971 | 4,06 | 981 | 0,149 |
| 600 | 5771 | 4,18 | 979 | 0,230 |
| 800 | 5571 | 4,30 | 977 | 0,313 |
| 1000 | 5371 | 4,41 | 975 | 0,398 |
| 1200 | 5171 | 4,52 | 974 | 0,485 |
| 1400 | 4971 | 4,63 | 975 | 0,574 |
| 1600 | 4771 | 4,74 | 977 | 0,666 |
| 1800 | 4571 | 4,84 | 980 | 0,759 |
| 2000 | 4371 | 4,94 | 987 | 0,855 |
| 2200 | 4171 | 5,03 | 996 | 0,954 |
| 2400 | 3971 | 5,13 | 1010 | 1,056 |
| 2600 | 3771 | 5,22 | 1028 | 1,161 |
| 2700 | 3671 | 5,27 | 1041 | 1,216 |
| 2900 | 3471 | 5,57 | 1068 | 1,330 |
| Çekirdek | | | | |
| 2900 | 3471 | 9,74 | 1068 | 1,33 |
| 3000 | 3371 | 9,90 | 1048 | 1,41 |
| 3200 | 3171 | 10,20 | 1005 | 1,62 |
| 3400 | 2971 | 10,47 | 960 | 1,82 |
| 3600 | 2771 | 10,72 | 913 | 2,02 |
| 3800 | 2571 | 10,95 | 865 | 2,21 |
| 4000 | 2371 | 11,16 | 816 | 2,40 |
| 4200 | 2171 | 11,36 | 767 | 2,58 |
| 4400 | 1971 | 11,54 | 717 | 2,75 |
| 4600 | 1771 | 11,71 | 670 | 2,91 |
| 4800 | 1571 | 11,87 | 632 | 3,06 |
| 4982 | 1389 | 12,00 | 598 | 3,19 |
| 5121 | 1250 | 15,01 | 564 | 3,30 |
| 6371 | 0 | 17,90 | 0 | 3,92 $10^6$ |

ÇİZELGE 1.2

Bullen(1940,1942)'e göre yeryuvarında derinliğin(yarıçapın) fonksiyonu olarak kitle yoğunluğu, çekim ve basınç [HEISKANEN,W.A.-F.A.VENING MEINESZ(1958)'den alınmıştır] ropun denklemi de

$$U(X,Y,Z) = U \; \text{sabit} \qquad (1.11)$$

olarak yazılır. Gerçek gravite vektörü $\vec{g}$ dan hem büyüklük hem de doğrultu bakımından farklı olan standart (normal) gravite vektörü $\vec{\gamma}$ da

$$\vec{\gamma} = \text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial X} , \frac{\partial U}{\partial Y} , \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \qquad (1.12)$$

olarak bulunur. Nasıl $\vec{g}$ jeopun normali doğrultusundaysa $\vec{\gamma}$ da sferopun normali doğrultusundadır.

## 2 - Çekül Sapması ve Türleri:

Koordinatları X,Y,Z olan bir P noktasından geçen jeop ile sferopun denklemlerindeki sabitler $W_P$ , $U_P$ ise bunlar arasında genel anlamda

$$W_P \neq U_P \qquad (2.1)$$

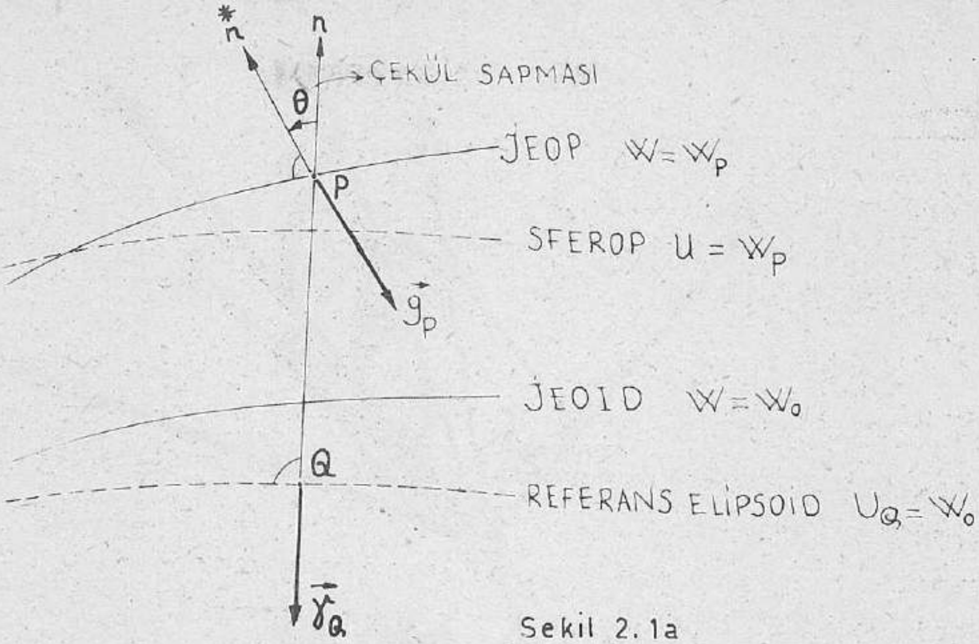
eşitsizliği
ya da her hangi bir nokta için geçerli

$$W(X,Y,Z) = U(X,Y,Z) + T(X,Y,Z) \qquad (2.2)$$

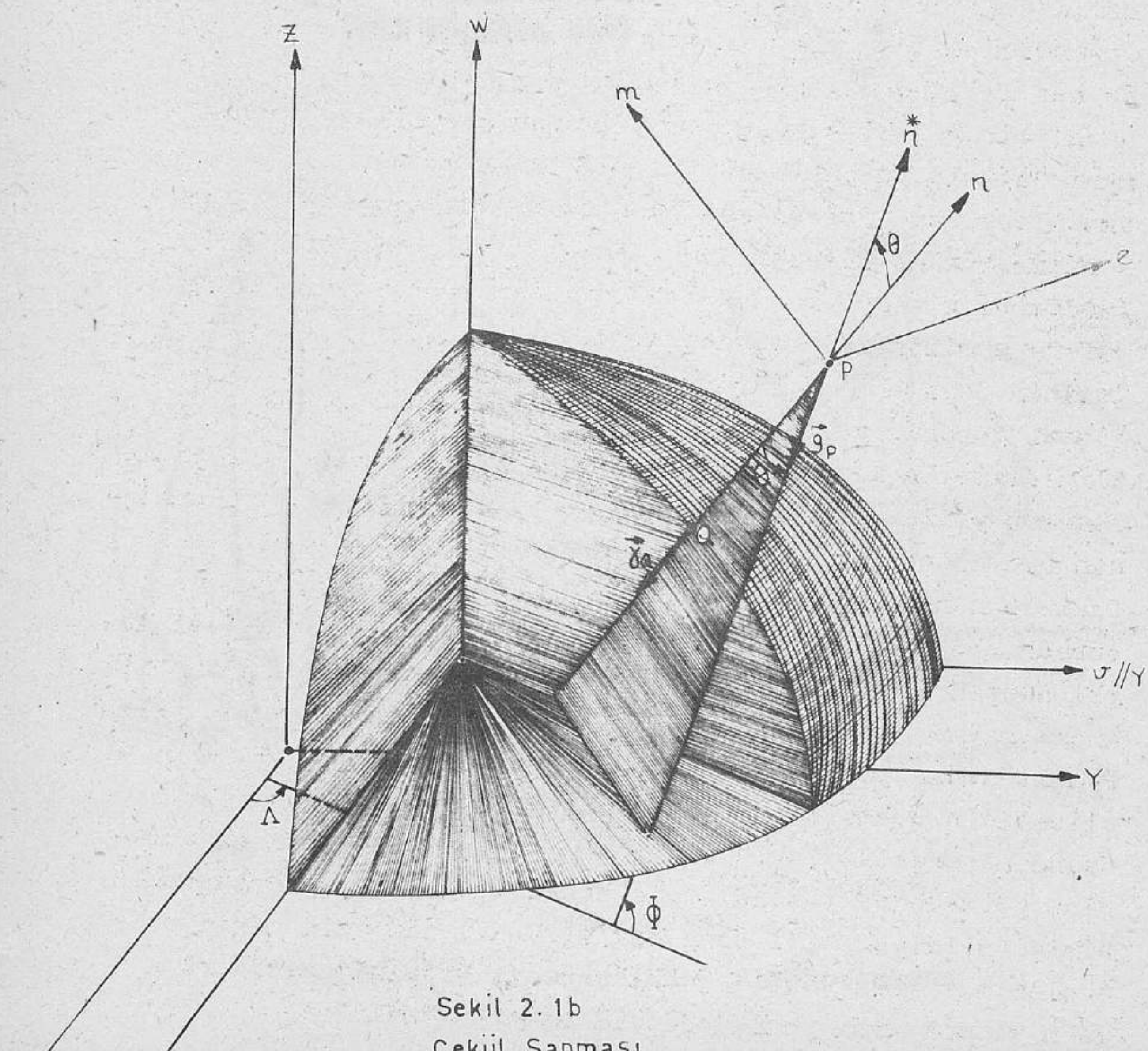
eşitliği yazılabilir.Buradaki T(X,Y,Z) fonksiyonuna bozucu potansiyel denir.Standart gravite alanının potansiyel fonksiyonu bazı varsayımlarla belirli kılınabilir.Eğer bozucu potansiyel fonksiyonu da bazı gözlemeler ve ölçüler ile belirli kılınabilirse gerçek gravite alanının potansiyel fonsiyonu bulunmuş olur.

Diğer bir yol da özel bir jeop ile ya bunun karşılığı sferopun ya da jeoidin karşılığı referans elipsoidin geometrik şekillerinin karşılaştırılmasıdır.Böylesi bir işlemde her iki yüzeyin normallerinin doğrultuları önemli roller yüklenirler.Şekil 2.1a, bir P noktası ile bundan referans elipsoide inilen dikin ayağı Q noktasını içinde bulunduran ve P'deki gerçek gravite vektörü $\vec{g}_P$ ile Q'daki standart gravite vektörü $\vec{\gamma}_Q$ nun belirlediği düzlemi göstermektedir.Şekilde bu düzlemin P'den geçen jeop,onun karşılığı sferop,jeoid ve referans elipsoid ile arakesitleri de gösterilmiştir.Aynı düzlemin içinde bulunan $\vec{n}$ ya da $\vec{g}_P$ doğa içinde P noktasındaki bir çekülün ipi ile çakışır, n ya da $\vec{\gamma}_Q$ ise düşünsel bir çekül doğrultusudur.Bu nedenle bu iki normal arasındaki $\theta$ açısına TOPLAM ÇEKÜL SAPMASI ya da kısaca ÇEKÜL SAPMASI adı verilir.P'den geçen jeopun kendi karşılığı sferopla karşılaştırılması durumunda, Q noktası P'den bu sferopa inilen dikin ayağı olacaktır.Dolayısiyle düşünsel çekül doğrultusu ve bundan ötürü de çekül sapması yukarıda tanımlananden farklı olacaktır.Ancak yeryüzüne yakın noktalar için karşılaştırma yüzeyi olarak referans elipsoidin alınması pratik gereksinimlerin doğurduğu bir gelenektir.Bu geleneğin dahası,ayrı jeoplar üzerinde bulunan P noktalarının uygun bir yolla jeoide indirgenmeleridir.

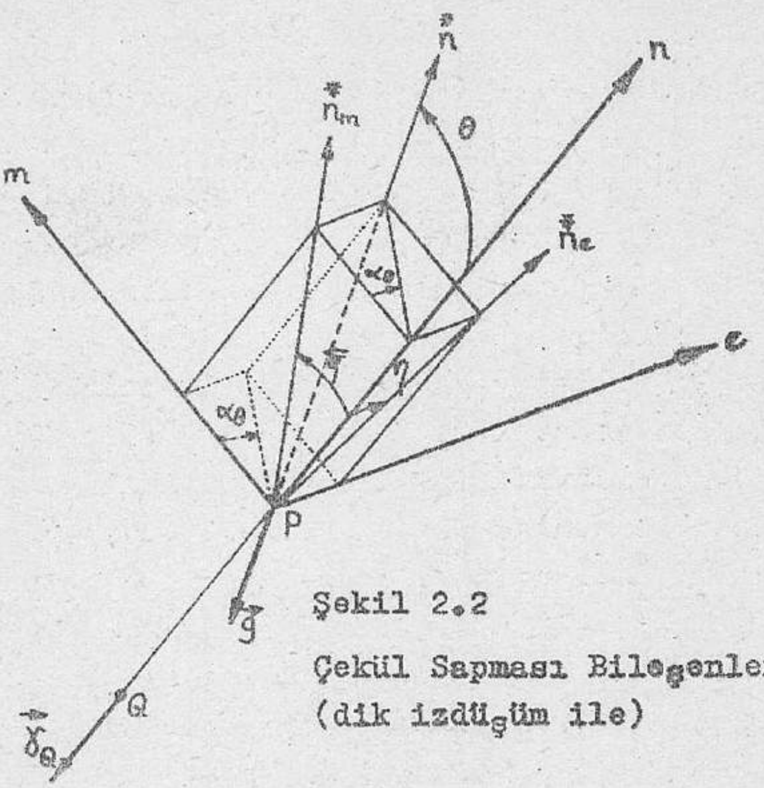
Çekül sapması,hesaplanma yöntemine ve kullanılan elipsoidin boyutları ile uzaydaki konumuna göre özel adla anılır.Şekil 2.1b yeryuvarına ilişkin doğal ve referans koordinatları bir arada göstermektedir.X,Y,Z doğal koordinatların başlangıç noktası yeryuvarının ağırlık merkezidir.Z ekseni belirli bir epoch için yeryuvarının ortalama dönme eksenidir.X ve Y eksenleri aynı epocha ait ortalama astronomik ekvator düzlemi içinde yer alırlar.Bunlardan X ekseni Greenwich astronomik meridyen düzlemine pareleldir.Y ekseni de her ikisine dik olup bir sağ el sistemi oluşturur.Her hangi bir P noktasından geçen jeopun normali $\overset{*}{n}$'ın ya da aynı doğrultuyu paylaşan $\vec{g}_P$ gerçek gravite vektörünün bu eksenlere göre doğrultusu astronomik gözlemelerle belirlenebilir.Bunlar $\Phi$(astronomik enlem) ve $\Lambda$(astronomik boylam)dır.u,v,w referans koordinatların başlangıcı kullanılan referans elipsoidin geometrik merkezidir.Bu sistemin eksenlerinin doğal X,Y,Z sisteminin eksenlerine sırasıyla parelel olması gerekir ve pratikte bunun sağlanması için önlemler alınabilir.En ideal olanı sistemlerin özdeş olmalarıdır.Ancak son yıllarda hızla gelişen ve yapay uydulardan yararlanan uydu jeodezisi tekniklerinin dışındaki yöntemlerle pratikte bunun sağlanması hemen hemen olanaksızdır.Bu nedenle burada böylesine bir ayırım yapılmıştır.Başka bir deyişle iki sistem arasında dönüklük olmaması her zaman sağlanabilir ancak kayma pek çok uygulamada kaçınılmazdır.Yukarıda anılan P noktasının jeodezik(elipsoid) enlemi $\varphi$ ve boylamı $\lambda$ da elipsoidin normali n ya da referans elipsoid üzerindeki standart gravite vektörü $\vec{\gamma}_Q$ nun referans sistemin eksenlerine göre doğrultusunu belirler.Başlangıcı P,eksenlerinden birisi n, diğer biri buna dik ve P nin elipsoid meridyen düzleminde artı yönü jeodezik kuzeye yönelmiş m,diğeri m ve n ye dik artı yönü jeodezik doğuya yönelmiş e olan bir




Şekil 2.1a
Çekül Sapması

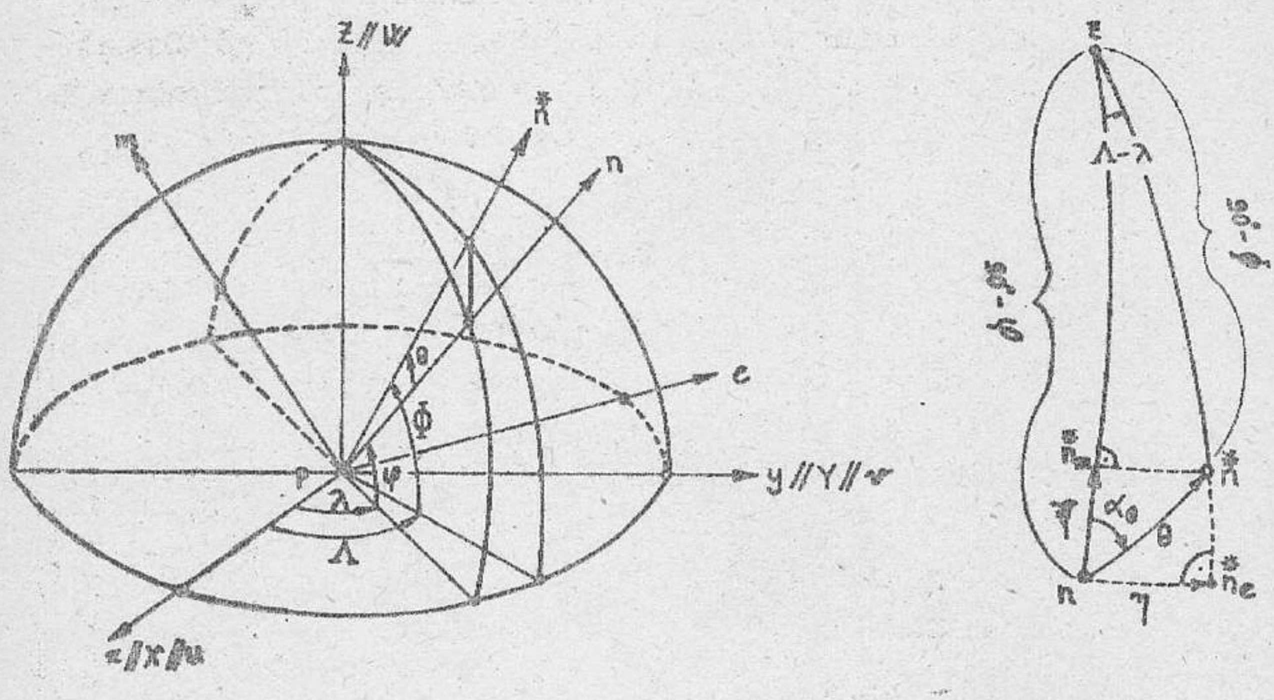



Şekil 2.1b
Çekül Sapması




Şekil 2.2

Çekül Sapması Bileşenleri
(dik izdüşüm ile)




a) b)

Şekil 2.3

Astrojeodezik Çekül sapması Bileşenleri

yerel referans dik koordinat sistemi daha düşünülebilir. Böylece P noktasındaki çekül sapmasının tüm geometrik ayrıntıları bu sistemde incelenebilir. Şekil 2.2 de görüldüğü gibi $\overset{*}{n}$ doğrultusu (n,e) ve (n,m) düzlemlerine izdüşürülerek $\overset{*}{n}_e$ ve $\overset{*}{n}_m$ doğrultuları elde edilir. Bunların n doğrultusu ile yaptıkları $\eta$ ve $\xi$ açıları $\theta$ çekül sapmasının **doğu-batı** ve **kuzey-güney** bileşenleridir. $(n,\overset{*}{n})$ ile (n,m) düzlemleri arasındaki ölçek açı $\alpha_\theta$ olup $\theta$ çekül sapmasının e,m,n sistemindeki azimutudur. Anılan $\eta$ ve $\xi$ çekül sapması bileşenlerinin astronomik $(\Phi,\Lambda)$ ve jeodezik $(\lambda, \varphi)$ koordinatlardan elde edilebilmesi için P noktasından X//u , Y//v , Z//w eksenlerine birer parelel çizilir. Ayrıca merkezi P yarıçapı birim olan bir küre düşünülürse ortaya Şekil 2.3a çıkar. Şeklin üzerinde astronomik $(\Lambda,\Phi)$ ve jeodezik $(\lambda,\varphi)$ koordinatlar ve çekül sapması $\theta$ açı olarak görülmektedir. Bu açılara birim küre üzerinde karşılık gelen yaylar ile $\eta$ ve $\xi$ açılarına karşılık gelen yaylar Z//w//, n , $\overset{*}{n}$ , $\overset{*}{n}_e$, $\overset{*}{n}_m$ doğrultularının birim küreyi deldiği noktalardan elde edilecek Şekil 2.3b de görülmektedir. P noktası kutuptan yeterince uzakta ise oluşan küresel üçgenin $(\Lambda-\lambda)$ açısı çok küçüktür. Bu durumda

$$\sin(\Lambda-\lambda) \simeq \Lambda-\lambda \quad , \quad \cos(\Lambda-\lambda) \approx 1$$
$$\sin(\Phi-\varphi) \approx \Phi-\varphi \quad , \quad \cos(\Phi-\varphi) \approx 1$$
$$\sin \eta \approx \eta \quad , \quad \cos \eta \approx 1$$
$$\sin \xi \approx \xi \quad , \quad \cos \xi \approx 1$$

yaklaşıklıkları kullanılarak şekildeki küresel üçgenlerden

$$\eta = (\Lambda-\lambda)\cdot\cos\varphi \qquad (2.3)$$

$$\xi \equiv \Phi-\varphi \qquad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\end{Bmatrix} \equiv \theta\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha_\theta\\ \cos\alpha_\theta\end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

$$\theta = \sqrt{\eta^2+\xi^2} = \eta\cdot\sin\alpha_\theta + \xi\cdot\cos\alpha_\theta \qquad (2.6)$$

yazılabilir. Ayrıca $\theta$ çekül sapmasının $\alpha$ gibi her hangi bir doğrultudaki bileşeni

$$\epsilon_\alpha = \theta \cdot \cos(\alpha_\theta - \alpha)$$

$$\epsilon_\alpha = \theta \cdot \sin \alpha_\theta \cdot \sin \alpha + \theta \cdot \cos \alpha_\theta \cdot \cos \alpha$$

$$\epsilon_\alpha = \eta \cdot \sin \alpha + \xi \cdot \cos \alpha \qquad (2.7)$$

eşitliğinden elde edilir.

Çekül sapması bileşenleri, ( 2.2 ) ve ( 2.3 ) eşitlikleri ile astronomik ve jeodezik verilerden hesaplanırsa ASTROJEODEZİK ÇEKÜL SAPMASI adını alır.

Ortalama yer elipsoidi referans elipsoidi olarak alınır, bunun u,v,w eksenleri doğal X,Y,Z eksenleri ile özdeşleştirilirse bulunacak çekül sapmalarına MUTLAK ÇEKÜL SAPMASI adı verilir. Bundan farklı boyutlardaki bir referans elipsoid ya da u,v,w eksenlerinin X,Y,Z eksenleri ile özdeş olmamaları halinde elipsoid normali ve dolayısiyle çekül sapması bileşenleri değişecektir. Böylesi durumlarda bulunacak çekül sapmalarına RELATİF ÇEKÜL SAPMASI denir. Pratikte karşılaşılan astrojeodezik çekül sapmaları genellikle relatif çekül sapmalarıdır.

Çekül sapması bileşenleri gravite ölçülerinden de hesaplanabilir. Bunun için

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi G} \iint_\sigma \Delta g \cdot \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} d\sigma \qquad (2.8)$$

biçimindeki Vening Meinesz integralleri kullanılır. Burada G yeryüzü için ortalama bir gravite değeridir; $\sigma$ tüm yeryüzünü, $d\sigma$ yüzey elemanını, $\psi$ yüzey elemanının bulunulan noktaya olan küresel uzaklığını, $\alpha$ bunun azimutunu temsil eder; $S(\psi)$ Stokes fonksiyonunun $\psi$ ye göre türevi olan $\frac{dS}{d\psi}$ Vening Meinesz fonksiyonu olarak bilinir; gravite anomalisi ölçülen $g_P$ ile hesaplanan $\gamma_Q$ değerlerinin farkı olarak

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \qquad (2.9)$$

biçiminde hesaplanır. Formüller çıkartılırken a)tüm P noktalarının jeoid üzerinde bulunduğu, b)referans elipsoidin geometrik merkezinin yeryuvarının ağırlık merkezinde olduğu ve üzerindeki gravite potansiyelinin jeoidin potansiyeline eşit olduğu ilk koşulları konmuştur. Gravite ölçülerinden hesaplandıklarından bunlara GRAVİMETRİK ÇEKÜL SAPMASI adı verilir. Formüllerin çıkışında alınan koşullar göz önünde tutulursa bunların jeoid yüzündeki noktalara ait mutlak çekül sapmaları olduğu görülür. Gravite anomalisine ait ( 2.9 ) formülündeki $g_P$ yeryüzünde ölçülen gravite olmayıp bunun jeoide indirgenmişidir.

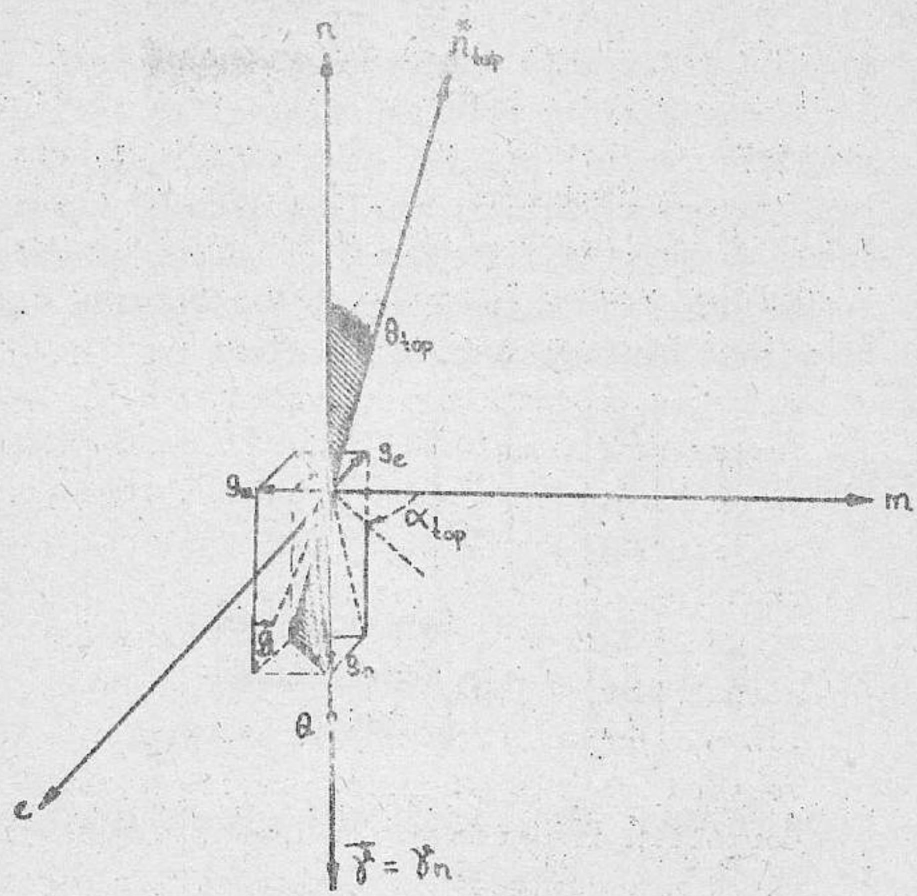
Gerek astrojeodezik gerekse gravimetrik çekül sapmalarının bulunmasında arazide gözlem ve ölçü yapmak kaçınılmazdır. Oysa aşağıda ayrıntılarına inilecek olan TOPOĞRAFİK ÇEKÜL SAPMASI ve İZOSTATİK ÇEKÜL SAPMASI ya da her ikisini de içeren TOPOĞRAFİK-İZOSTATİK ÇEKÜL SAPMASI'nı bulmak için doğa içinde gözlem yapmaya gerek yoktur. Bunlar yeryuvarını oluşturan kitlelerdeki yoğunluk dağılımlarına ilişkin bazı varsayımlara dayanıp topoğrafik haritalardan elde edilecek yeryüzü engebeleri ile hasaplanırlar. Bu nedenle bazı kaynaklarda bunlara "yeryüzündeki görünen kitlelerin çekül doğrultusuna etkisi" ya da "topoğrafik-izostatik çekül sapması indirgemesi" gibi adlar verilir.

## 3- Topoğrafik Çekül Sapması:

Pratikte topoğrafik çekül sapmaları da gravimetrik çekül sapmaları gibi jeoid yüzündeki bir nokta için hesaplanır.

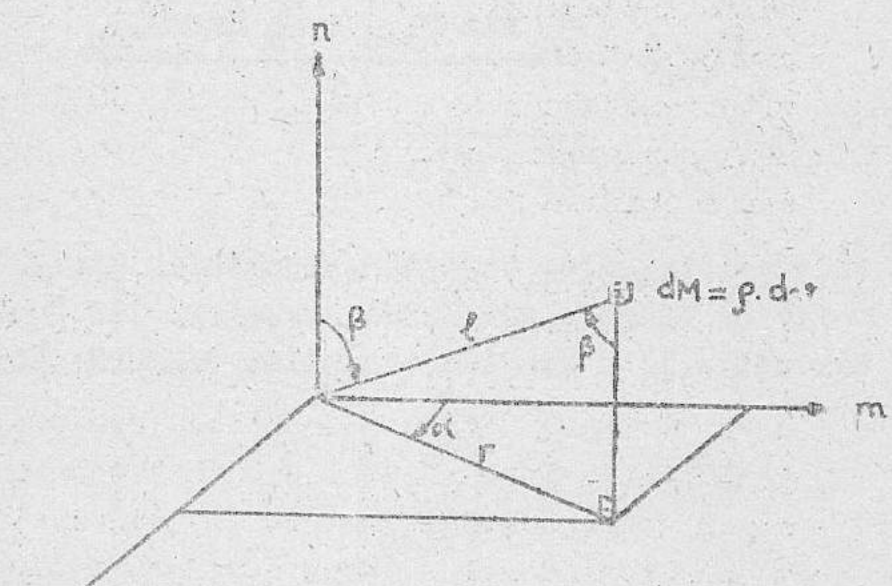
Jeoidin bir dönel elipsoid biçiminde olduğunu varsayabilmek a) jeoidin dışında hiç bir kitlenin bulunmadığını, b) yeryuvarını oluşturan kitlelerin bu varsayımı doğrulayan bir yoğunluk dağılımına uyduğunu varsaymakla olasıdır. Bir an için bu varsayımlar kabullenilirse jeoid yerine u, v, w eksenleri X, Y, Z eksenleri ile çakışan bir dönel elipsoid düşünmek gerekir. Bu, aynı zamanda referans elipsoid olarak alınabilir. Böylece jeoid yüzündeki P ile referans elipsoid yüzünde bunun karşılığı Q üst üste gelir, gerçek gravite vektörü $\vec{g}_P$ ile standart gravite vektörü $\vec{\gamma}_Q$ ve jeoidin normali $\overset{*}{n}$ ile referans elipsoidin normali n özdeş olur. Ancak, deniz seviyesinin üstünde diğer bir deyişle jeoidin dışında kitlelerin varlığı görünen bir gerçektir, bunların bulunmadığı varsayılamaz. Dolayısiyle jeoid altındaki kitlelerde yoğunluk dağılımlarının bir dönel elipsoid için öngörülen düzgünlükte olduğu kabullenilse bile dıştaki kitlelerin çekim etkisi ile bu şekil bozulacaktır. Bu nedenle gravite vektörünün hem büyüklüğü hem de doğrultusu, dolayısiyle $\overset{*}{n}$(n) normalinin doğrultusu az da olsa sapacaktır. İşte bu sapma açısına TOPOĞRAFİK ÇEKÜL SAPMASI adı verilir.

Şekil 3.1, bu durumu başlangıcı P (jeoid noktası) olan bir yerel dik koordinat sisteminde göstermektedir. Jeoid dışında kitlelerin bulunmaması halinde P ile Q, n ile $\overset{*}{n}$ ve $\vec{g}$ ile $\vec{\gamma}$ özdeş olacaklardı. Jeoid dışında düzgün olmayan kitlelerin varlığı ile bu noktadaki gravite ve potansiyel değişecek, dolayısiyle eşpotansiyelli noktaların geometrik yeri dönel elipsoidden farklı bir biçime girecek ve bu yüzeyin normali $\overset{*}{n}_{top}$ ile n arasında topoğrafik çekül sapması $\Theta_{top}$ açısı oluşacaktır. Bu açının düzleminin e, m, n sistemindeki azimutu ise $\alpha_{top}$ olacaktır. Böylece jeoidin




Şekil 3.1

Topoğrafik Çekül Sapması




Şekil 3.2

Nokta kitlenin yerel dik ve kutupsal koordinatları dışında kitlelerin bulunmaması durumundaki $\vec{\gamma}$ gravite vektörleri^nin^ seçilecek referans elipsoidle birlikte düşünülerek standart gravite alanını oluşturdukları, buna karşılık düzgün olmayan kitlelerin varlığı dikkate alınmakla elde edilecek $\vec{g}$ gravite vektörleri^nin^de gerçek gravite alanını oluşturdukları varsayılacaktır. Bu vektörlerin e,m,n yerel dik koordinat sistemindeki bileşenleri de

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_e \\ \gamma_m \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} , \qquad (3.1)$$

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} g_e \\ g_m \\ g_n \end{bmatrix} = -g \cdot \begin{bmatrix} \sin\alpha \sin\theta \\ \cos\alpha \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{top} \qquad (3.2)$$

olur. Buradan, $\theta_{top}$ küçük bir açı olduğundan $\sin\theta = \theta$ ve $\tan\theta = \theta$ konarak

$$\eta_{top} = \theta_{top} \cdot \sin\alpha_{top} = -\frac{g_e}{g} \qquad (3.3)$$

$$\xi_{top} = \theta_{top} \cos\alpha_{top} = -\frac{g_m}{g} \qquad (3.4)$$

$$\theta_{top} = -\frac{g_e \sin\alpha_{top} + g_m \cos\alpha_{top}}{g} \qquad (3.5)$$

$$g = \sqrt{g_e^2 + g_m^2 + g_n^2} \qquad (3.6)$$

elde edilir. Diğer taraftan, topoğrafik kitleler olamasaydı $\vec{g}$ ile $\vec{\gamma}$ özdeş olacaklardı varsayımı ile jeoid yüzündeki bir nokta için gravite anomalisi vektörü olarak

$$\vec{\Delta g} = \vec{g} - \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} g_e \\ g_m \\ g_n - \gamma \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

biçiminde yazılacak fark vektörünün kaynağının yeryüzündeki tüm topoğrafik kitleler olduğu söylenebilir. Bu kitlelerden

( 3.7 ) fark vektörünün bileşenleri,dolayısiyle de ( 3.3 ) ve ( 3.4 ) den topoğrafik çekül sapmasının doğu-batı ve kuzey-güney bileşenleri hesaplanır.

Newton çekim yasasına göre dM kitle elemanının kendisinden $\ell$ kadar uzağındaki bir birim kitleye uygulayacağı çekim kuvveti dg , k çekim sabiti olmak üzere

$$dg = k\,\frac{dM}{\ell^2} = k\cdot\frac{\rho}{\ell^2}\,dv \qquad (3.8)$$

ile bellidir.Bu kuvvet $\ell$ boyunca olacağından, $\ell$'nin e,m,n sisteminde başucu açısı $\beta$ , azimutu $\alpha$ ise kuvvetin bu sistemdeki bileşenleri de

$$\vec{dg} = \begin{bmatrix} dg_e \\ dg_m \\ dg_n \end{bmatrix} = dg\cdot\begin{bmatrix} \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

ile belirlidir.Diğer taraftan dM kitle elemanın yoğunluğu $\rho$;hacim elemanı dv;bunun koordinatları e,m,n ile

$$\sin\beta = \frac{r}{\ell} = \sqrt{\frac{e^2+m^2}{e^2+m^2+n^2}} \qquad (3.10)$$

olduğuna göre ( 3.3 ),( 3.4 ),( 3.8 ),( 3.9 ) ve ( 3.10) ile

$$\begin{Bmatrix} d\eta \\ d\xi \end{Bmatrix}_{top} = -k\cdot\frac{\rho}{g}\cdot\frac{r}{\ell^3}\begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}\cdot dv \qquad (3.11)$$

bulunur.Bu eşitlikte g paydada olduğundan integasyon sırasında yerine tüm yeryuvarı için sabit bir G alınmakla pratik değeri olmayan,küçük ve gözardı edilebilecek bir hata yapılmış olunur.Böylece ( 3.11) tüm topoğrafik kitleler için integre edilerek

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}_{top} = \frac{-k}{G}\iiint\limits_{v_{top}} \frac{r}{\ell^3}\cdot\rho\cdot\begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}\cdot dv \qquad (3.12)$$

bulunur. Bu integraldeki hacim elemanı dv Şekil 3.3 de görüldüğü gibi oluşturulabilir. Bu, referans elipsoidin normali doğrultusunda integre edilirse tepe noktaları aşağıya yönelmiş pramit biçiminde bir kolon elemanına dönüşür. Söz konusu kolon elemanının tepesinde oluşan uzay açısına $d\sigma$ denirse dv hacim elemanı

$$dv = (M + z)\cdot(N + z)\cdot dz\cdot d\sigma \qquad (3.13)$$

olarak yazılabilir. Hacim elemanının elipsoid koordinatları $\lambda$, $\varphi$, z dir. ( 3.13 ) de geçen M ve N referans elipsoidin yarıçaplarından büyüğü $a$ küçüğü b , birinci dışmerkezliği $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ ve hacim elemanının jeodezik enlemi $\varphi$ ile

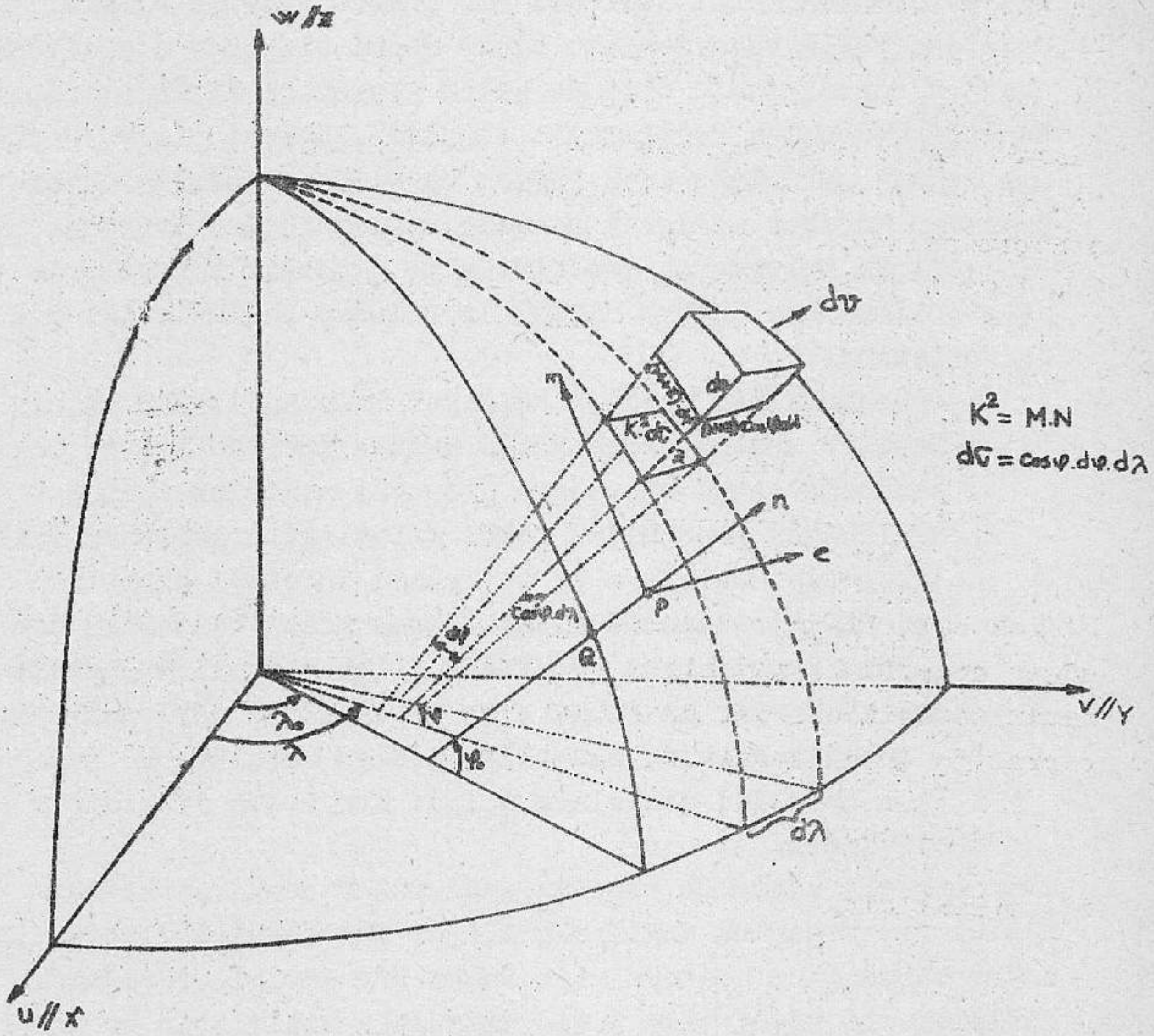
$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \qquad (3.14)$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \qquad (3.15)$$

olarak belirlidir ve referans elipsoidin meridyen ve birinci düşey doğrultularındaki eğrilik yarıçaplarıdır. Kolon elemanının tepesindeki $d\sigma$ uzay açısı birim kürede yüzey elemanı olarak da düşünülebilir. Elipsoid koordinatlarına göre bu

$$d\sigma = \cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d\lambda \qquad (3.16)$$

ile belirlidir.




Şekil 3.3

Iskara yönteminde hacim elemanı

## 4-İzostatik Çekül Sapması:

İster astrojeodezik isterse gravimetrik olsun gözleme ve ölçülerden bulunacak çekül sapmalarının topoğrafik çekül sapmalarıyla karşılaştırılabilmesi ya da topoğrafik kitlelerin çekimi yok kabul edilecek bir gerçek gravite alanının eşpotansiyelli yüzeylerinin birer dönel elipsoid olabilmesi ancak ve ancak jeoid altında kalan yeryuvarı kitlelerinin buna uyan bir yoğunluk dağılımıyla olasıdır.Böylesi bir varsayımın doğaya uygunluğu için gözlem ve ölçü sonuçlariyle varsayımdan hareket edilerek hesaplanacak sonuçlar arasında bir çelişki bulunmamak gerekir.Bunun jeodezik yöntemlerle araştırılmasında bugüne değin birbirinden bağımsız iki yol denenmiştir:

a - Sınırlı bir bölgeyi kapsayan triyangulasyon ağının Laplace noktalarında jeoid yüzüne indirgenmiş astrojeodezik çekül sapmaları ile aynı noktalar için hesaplanacak topoğrafik çekül sapmaları arasındaki farklar,gözlem hataları ve hesaplama inceliği sınırları içinde,iki elipsoid sistemi arasındaki benzerlik dönüşümü kurallarına uymalıdır.Bölge yeterli küçüklükte ise bu farkların sabit olması gerektiği söylenebilir.

b - Bouguer gravite anomalileri,ölçü hataları ve hesaplama inceliği sınırları içinde her nokta için sıfır olmalıdır.

Oysa her iki yöntemde yapılan sağlamalar jeoid altındaki kitlelerin yoğunluk dağılımları için öne sürülen varsayımın doğru olmadığını göstermiştir.Başka bir deyişle,topoğrafik kitleler olmasaydı bile jeoid altındaki kitlelerin yoğunluk dağılımları jeoidi bir dönel elipsoid varsaymaya elvermeyecektir.Buradan bir adım daha ilerlenip,yerkabuğunun kalınlığı ve yerkabuğu kitlelerinin yoğunluk dağılımlarıyla ilintili varsayımlar ortaya konmuştur.Bunlara genel ad olarak İZOSTASİ KURAMI denir.

Konunun daha iyi anlaşılabilirliğini sağlamak amacı ile yukarıda anılan "Topoğrafik kitleler olmasaydı jeoid bir dönel elipsoid olurdu." varsayımının yeterli olmadığının gözlendiği ilk rastlantısal olayların burada sözünü etmekte yarar vardır.

19. yüzyılın ortalarına doğru ünlü İngiliz jeodezicisi Everest Hindistanda bir triyangulasyon ağı kurmuş ve Kaliana ile yaklaşık 650 km güneyindeki Kalianpur noktalarında astronomik gözlemelerle enlem belirlemiştir. Everest bu iki noktanın triyangulasyon ağından elde ettiği jeodezik enlemlerin farkının astronomik gözlemelerle belirlediği astronomik enlemlerin farkından 5",24 daha büyük olduğunu görmüştür. Bunun anlamı, anılan noktalardaki astrojeodezik çekül sapmalarının farkının 5",24 olduğudur. Kalküta'da bir İngiliz başdiyakosu (din adamı) olan J.H.PRATT ilkin bunun triyangulasyon ağındaki ölçü hatalarından gelmediğini, asıl nedenin yakındaki Himalaya dağlarının kitlelerinin çekül doğrultusunu saptırmasının bir sonucu olduğunu düşünmüştür. Böylece topoğrafik çekül sapması kavramı doğmuştur. Ancak Pratt sözkonusu iki noktada da topoğrafik çekül sapmalarını hesaplayıp farklarını aldığında görmüştür ki bu açıklama yetersizdir. Çünkü Kaliana'da 27",85 , Kalianpur'da 11",97 olarak hesapladığı topoğrafik çekül sapmalarının farkı 15",88 dir ve astrojeodezik çekül sapmaları farkından çok büyüktür. Bu sonuç J.H.Pratt'a ve yine bir İngiliz olan astronomici G.B.Airy'ye izostatik denge kavramı için esin kaynağı olmuştur.

Diğer yandan, yaklaşık bir yüzyıl kadar daha önce 18. yüzyıl ortalarında yeryuvarının şekliyle ilgili araştırmalar yapmak üzere Fransız'ların Peru'ya gönderdiği jeodezi heyetinin bir üyesi olan Pierre Bouguer yapılan gravite ölçülerinden topoğrafik kitlelerin etkilerini kaldırmak için bunların çekimlerini hesaplamış ancak bunları umduğundan düzenli olarak küçük bulmuştur. Başka bir deyişle Bouguer anomalileri dağlık bölgelerde arazinin yüksekliği ile orantılı, düzenli bir biçimde eksi işaretli çıkmıştır.

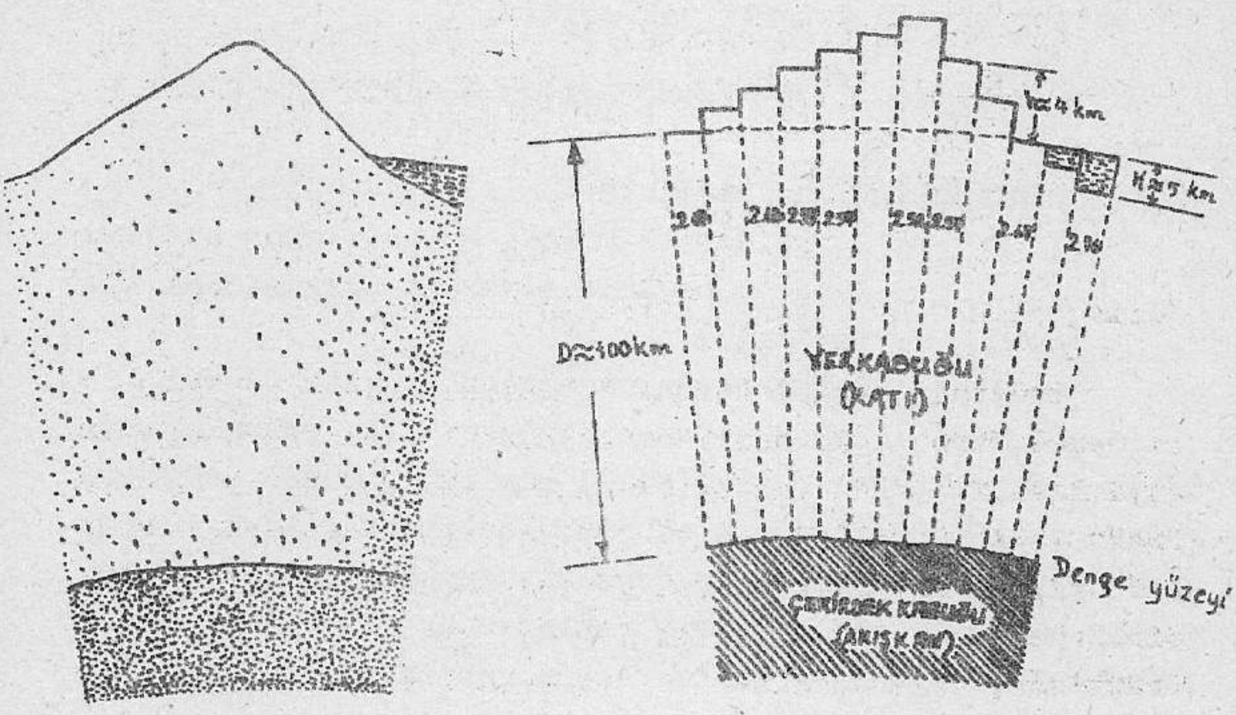
Bu durumu,R.J.Boscovica,Pratt'ın kendisinden yüzyıl kadar sonra başka bir nedene dayanarak verdiği izostatik denge açıklamasına paralel bir biçimde yorumlamıştır.Ancak sayısal hesaplamalara girişmemiştir.

Aslında bu doğa gerçeği 16. yüzyıl başlarında rönesansın ünlü adı Leonardo da Vinci tarafından da sezgi yoluyla görülmüştür.Konuyla ilgili ilk yazılı belgenin de ona ait olduğu sanılmaktadır.

İzostasi sözcüğü ilk kez 1889 yılında bir Amerikalı jeolog olan C.E.Dutton tarafından kullanılmıştır.

İzostasi kuramı bugüne dek birbirinden farklı iki ayrı temel varsayımla açıklanmıştır.Bunlar Pratt ve Airy varsayımlarıdır.Kendi varsayımlarını açıklayan birer makaleyi Pratt 7/Aralık/1854 , Airy 25/Ocak/1855 tarihlerinde birbirlerinden habersiz (Royal Society,London) a göndermişlerdir.Daha sonra, 20.yüzyılın ilk yarısında da J.F.Hayford Pratt'ın , W.A.Heiskanen de Airy'nin varsayımlarını kendilerince geliştirip yaygın bir biçimde jeodezik çalışmalara uygulamışlardır.Bu nedenle,bu iki varsayımdan çoğu kaynakta Pratt-Hayford,Airy-Heiskanen sistemleri olarak söz edilir.

P r a t t - H a y f o r d  S i s t e m i : Pratt'ın varsayımında katı yerkabuğu ile cıvık çekirdek kabuğu arasında düzgün bir denge yüzeyinin varlığı kabul edilir.Ayrıca yerkabuğunun kalınlaştığı yerlerde yoğunluğun standart yerkabuğu yoğunluğundan az,inceldiği yerlerde çok olduğu varsayılmaktadır.Böylece yerkabuğunun küçük bir bölümü için Şekil 4.1a'da görülen kesit resmi çizilebilir.Yerkabuğu sanki bir teknede duran ve toplam kitlesi önceki ile aynı olan mayalı hamur gibi yer yer kabarmıştır ve yeryüzü engebeleri oluşmuştur.Dağların,tepelerin altındaki kitlelerin yoğunluğu çukurlara göre daha azdır.Bu kabarmaların denge yüzeyinin biçimini etkilemediği varsayılmakla denge yüzeyinin her noktasında basıncın eşit olduğu kabul edilmektedir.




a) b)

Şekil 4.1

Pratt-Hayford izos asi sistemi

Bu sistemin matematik tanımının verilmesi için yerkabuğu içindeki bir hacim elemanı ele alınıp aşağıya doğru denge yüzeyine kadar, yukarıya doğru da yeryüzüne kadar uzatılarak yerkabuğu için bir kolon elemanı oluşturulur. Böylece Şekil 4.1a'daki kesit resmi Şekil 4.1b'deki görünüme dönüşür. Yerkabuğunun tümünü kapsayacak sonsuz sayıda kolonun her birine ait yüzey elemanının sonsuz küçük bir sabite eşit olması durumunda denge yüzeyi üzerinde her noktaya sabit basınç koşulu yeterli yaklaşıkla

$$\frac{1}{(M-D)(N-D)} \int_{-D}^{h} g \cdot \rho \cdot (M+z) \cdot (N+z) dz = \text{sabit} \qquad (4.1)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikte

D : Denge derinliği (Söz konusu kolon boyunca denge yüzeyinin referans elipsoidden olan uzaklığı),

$g = g(z)$ : Kolon boyunca değişen gravite değeri,

$\rho = \rho(z)$ : Kolon boyunca değişen kitle yoğunluğudur.

Kolon elemanı kuvvet eğrisi (çekül eğrisi) boyunca değil de referans elipsoid inhacaalı boyunca oluşturulduğundan dolayı "yaklaşık" deyimi kullanılmıştır. Jeodezik uygulamalarda sayısız pratik yararlar sağlayan bir yaklaşım da eşit kitle koşuludur. Kolon boyunca yoğunluk sabit kabulü ile bu da

a) karalar için

$$\rho \int_{-D}^{h} (M+z)(N+z) dz = \rho N \cdot M \cdot (\bar{D}+\bar{h}) = C \qquad (4.2)$$

b) denizler için

$$\rho' \int_{-D}^{-h'} (M+z)(N+z) dz + \rho_w \int_{-D}^{0} (M+z)(N+z) dz =$$

$$= \rho' M \cdot N \cdot (\bar{D}-\bar{h}') - \rho_w M \cdot N \cdot \bar{h}' = C \qquad (4.3)$$

olarak yazılır. Bu eşitliklerde

$\rho$ : Yeryüzünde karaya ulaşan bir kolonda kitle yoğunluğu,

h : Yeryüzünde karaya ulaşan bir kolonda arazinin elipsoid yüksekliği,

$\rho'$ : Yeryüzünde denize ulaşan bir kolonda su altında kalan kitlelerin yoğunluğu,

$h'$ : Yeryüzünde denize ulaşan bir kolonda deniz derinliği,

$\rho_w$ : Deniz suyu yoğunluğu,

C : Sabit,

$$\bar{h} = h\cdot(1 + \frac{N+M}{2NM}\,h + \frac{1}{3NM}\,h^2) \qquad (4.4)$$

$$\bar{D} = D\cdot(1 - \frac{N+M}{2NM}\,D + \frac{1}{3NM}\,D^2) \qquad (4.5)$$

$$\bar{h}' = h'\cdot(1 - \frac{N+M}{2NM}\,h' + \frac{1}{3NM}\,h'^2) \qquad (4.6)$$

olarak belirlidir. Ancak ( 4.2 ) ve ( 4.3 ) eşitliklerinin izostatik çekül sapması hesaplarında kullanılabilmeleri için biraz değiştirilmeleri gerekir. Bu da yukarıda tam jeoidde biten bir kolonla sağlanır. Başka bir deyişle ( 4.2 ) eşitliğinde $h = 0$ , ( 4.3 ) eşitliğinde $h' = 0$ konur ve bu kolonun kitle yoğunluğu $\rho_0$, sabit kalınlıklı ( D ) düşünsel bir standart yerkabuğunun sabit yoğunluğu olarak alınır. Böylece

$$C = \rho_0\cdot N\cdot M\cdot \bar{D} \qquad (4.7)$$

bulunur. Bu eşitlik, ( 4.2 ) de yerine konursa

a) karalar için ,

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0\cdot\frac{\bar{h}}{(\bar{D}+\bar{h})} \quad , \qquad (4.8)$$

ve ( 4.3 ) de yerine konursa

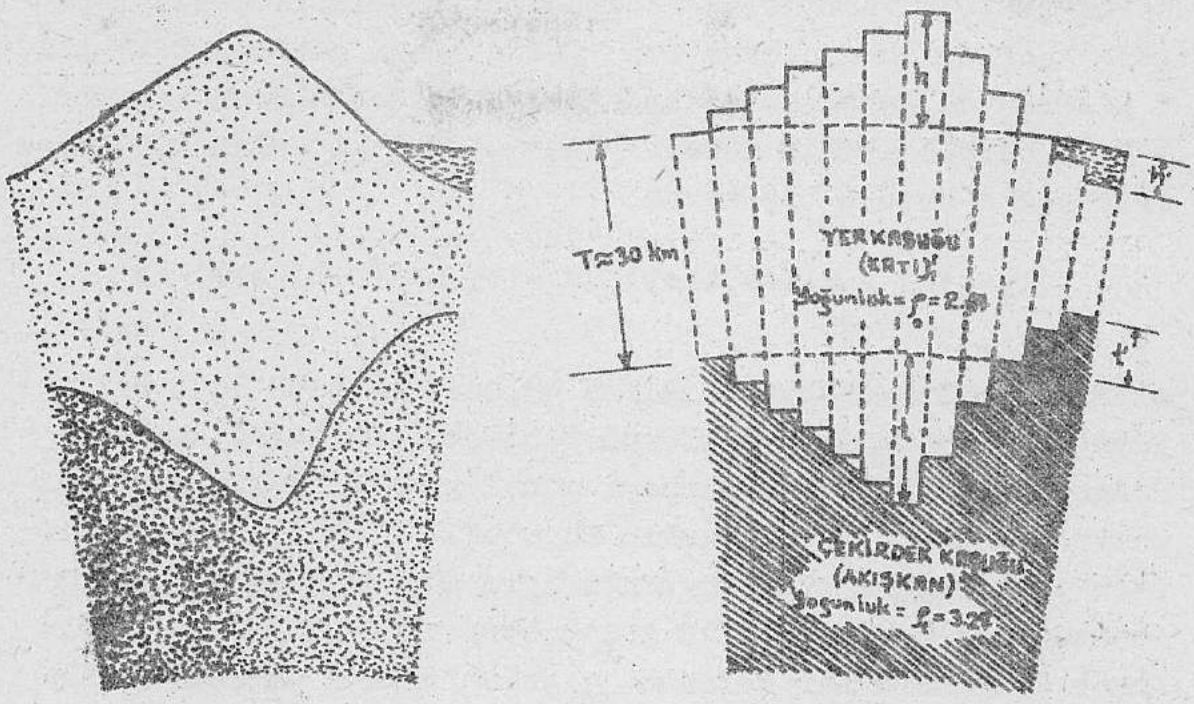
b) denizler için

$$\Delta\rho' = \rho' - \rho_0 = (\rho_0 - \rho_w)\cdot\frac{\bar{h}'}{(\bar{D}-\bar{h}')} \qquad (4.9)$$

elde edilir. Pratikte sabit kalınlıklı standart bir yerkabuğunun sabit yoğunluğu $\rho_0$ olarak 2.67 gr/cm$^3$, deniz suyunun yoğunluğu $\rho_w$ olarak da 1.027 gr/cm$^3$ alınır.

Bu matematik tanımlamalardan sonra Pratt-Hayford sisteminin sözcüklerle açıklanması oldukça kolaylaşır. Eğer yeryüzünde karaya ulaşan bir kolonun deniz seviyesinin üstünde kalan kısmı deniz seviyesinin altında kalan kısmına sıkıştırılırsa ve eğer yeryüzünde denize ulaşan bir kolonun su altında kalan kısmı gevşetilerek artan kitleler su olan kısmına sıkıştırılırsa sabit D kalınlığında ve sabit $\rho_0$ yoğunluğunda standart bir yerkabuğu elde edilir. Pratt bu kuramda denge yüzeyi olarak deniz seviyesinden her noktada eşit uzaklıkta bir yüzey almıştır. Hayford ise karalarda yeryüzünden, denizlerde deniz dibinden eşit uzaklıkta noktaların oluşturduğu yüzeyi denge yüzeyi olarak almıştır. Böylece deniz seviyesinden itibaren denge derinliği Pratt'a göre D , Hayford'a göre karalar için D-h ve denizler için D+h' olacaktır.

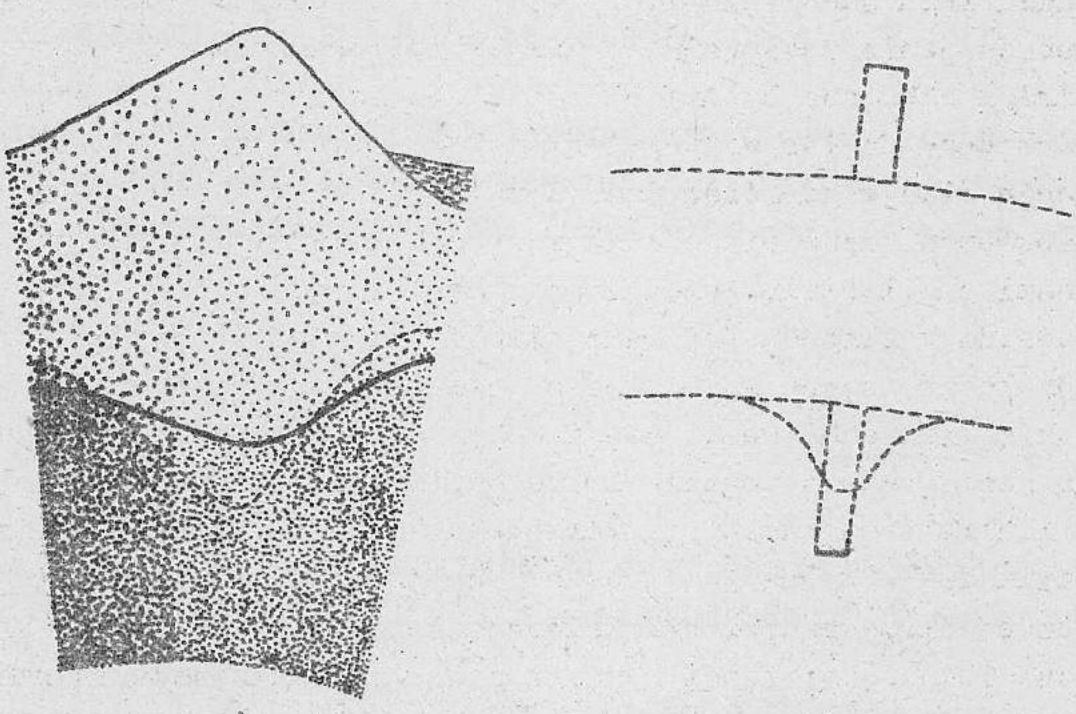
A i r y - H e i s k a n e n  S i s t e m i : Airy'nin varsayımında $\rho_0$ sabit yoğunluklu katı yerkabuğu, yoğunluğu $\rho_0$'dan büyük $\rho_1$ olan cıvık çekirdek kabuğunda buz dağlarının suda yüzdükleri gibi yüzmektedir. Yerkabuğu, oluşurken deniz seviyesinden yüksekliği oranında aşağıda çekirdek kabuğuna batmış olacaktır. Başka bir deyişle, katı yerkabuğu dağlar ve tepelerin olduğu yerlerde kalın, denizlerin olduğu yerlerde ince olmalıdır. Bu varsayıma göre yerkabuğunun küçük bir bölümü için Şekil 4.2a'da görülen kesit resmi çizilebilir. Aynen Pratt varsayımında olduğu gibi burada da yerkabuğu referans elipsoidin normali boyunca oluşturulacak sonsuz sayıda kolon elemanına ayrılabilir. Böylece Şekil 4.2a'daki kesit resmi Şekil 4.2b görünümüne dönüşür. Bu kez $\rho_0$ sabit yoğunluklu ve deniz yüzeyinden itibaren T kalınlıklı standart bir yerkabuğu düşünülür. Yerel bir izostatik denge kabul edilirse her kolon kendi içinde denge durumundadır. Karadaki bir kolonun standart yerkabuğunda kalan T parçası kendi kendini dengeler. Deniz seviyesinin üstündeki h parçası standart yerkabuğunun altında çekirdek kabuğuna gömülü t parçası tarafından dengelenir. Kolonun bu




a) b)

Şekil 4.2

Airy-Heiskanen izostasi sistemi



a) b)

Şekil 4.3

Bölgesel Vening Meinesz sistemi

parçasına ( t parçasına) kök denir. Yukarıdaki benzetmeye göre kolonun h parçası suda yüzen buzun görünen kesimini, t parçası da buzun su altında kalan ve görünmeyen kesimini temsil eder. Bu, birim kürede yüzey elemanı $d\sigma$ olan bir kolon için yüzme koşulu biçiminde

$$(\rho_1 - \rho_0) \int_{-(T+t)}^{-T} g\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot dz = \rho_0 \int_{0}^{h} g\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot dz \qquad (4.10)$$

olarak yazılır. Dikkat edilirse bu, kolonun tümü için bir yüzme koşulu değildir. Kolonun T parçasının kendi kendini dengelemesi koşulu, bu parçayı genel yüzme koşulundan çıkarmaktadır. Sabit $\rho_0$ yoğunluklu ve sabit T kalınlıklı standart yerkabuğunu tüm yeryuvarı için düşünmek gerektiğinden denizdeki bir kolon'da bu genel çerçevede ele alınmalıdır. Ancak denizdeki bir kolonun $\rho_0$ yoğunluklu T parçası bütün olarak yoktur. Bu nedenle de kolonun $h'$ derinlikli $\rho_w$ yoğunluklu su parçası, $\rho_1$ yoğunluklu $t'$ antikök parçası tarafından dengelenirken bütün olarak bulunmayan bu T parçası oluşturulur. Böylesi bir işlem karalar için yazılan ( 4.10) eşitliğinde olduğu gibi yüzme koşulu biçimindeki

$$(\rho_1 - \rho_0) \int_{-T}^{-(T-t)} g\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot dz = (\rho_0 - \rho_w) \int_{-h'}^{0} g\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot dz \qquad (4.11)$$

denklemiyle gerçekleşir. Gerek ( 4.10) gerekse ( 4.11) eşitlikleri yerine, integral boyunca değişken olan gravite g için sabit bir büyüklük kabul edilirse, yaklaşıklıkla

$$\bar{t} = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0}\cdot \bar{h} \qquad (4.12)$$

$$\bar{t}' = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\rho_1 - \rho_0}\cdot \bar{h}' \qquad (4.13)$$

yazılabilir. Buradaki $\bar{h}$ ve $\bar{h}'$ büyüklükleri ( 4.4 ) ve ( 4.6 ) ile $\bar{t}$ ve $\bar{t}'$ büyüklükleri de

$$\bar{t} = t\left[1 - \frac{M+N}{2MN}\cdot(2T+t) + \frac{1}{3MN}\cdot(3T^2+3Tt+t^2)\right] \qquad (4.14)$$

$$\bar{t}' = t'\left[1 - \frac{M+N}{2MN}\cdot(2T+t') + \frac{1}{3MN}\cdot(3T^2-3Tt'+t'^2)\right] \qquad (4.15)$$

ile belirlidir.

Özel bir yüzme durumu için yazılmış olan ( 4.10) ve ( 4.11) eşitliklerinin yaklaşığı olarak yazılan ( 4.12) ve ( 4.13) eşitliklerinin aslında daha gerçekci bir fiziksel anlamı vardır. Karalara ait ( 4.12) eşitliğinin fiziksel yorumu şeyle yapılabilir. Eğer kolonun $\rho_o$ yoğunluklu h parçasının kitleleri oradan tümüyle alınıp t kök parçasına sıkıştırılırsa jeoidin üstünde hiç kitle kalmaz ve t parçasının yoğunluğu $\rho_1$ olur. Böylece $\rho_o$ yoğunluklu T kalınlıklı standart yerkabuğunun bir kolonu elde edilir. Aynı yolla ( 4.13) eşitliği de şöyle yorumlanabilir. Eğer kolonun $t'$ antikök parçası gevşetilerek yoğunluk $\rho_o$ olacak şekilde bir miktar kitle alınıp bunlar $\rho_w$ yoğunluklu $h'$ derinlikli su parçasına sıkıştırılırsa yoğunluk burada da $\rho_o$ olur ve denizlere ait bir kolon standart yerkabuğunun bir kolonuna dönüşür. Ayrıca görülmektedir ki tüm bunlar yapılırken yeryuvarının toplam kitlesi değiştirilmemektedir.

Uygulamalarda denge derinliği T olarak 30 km dolaylarında bir değer, yoğunluklar olarak da yine $\rho_w = 1,027$ , $\rho_o = 2,67$ gr/cm$^3$ ve $\rho_1 = 3.27$ gr/cm$^3$ değerleri alınır. Bu değerlerle ( 4.12) ve ( 4.13) eşitlikleri için

$$\bar{t} = 4.45\ \bar{h} \qquad (4.16)$$

$$\bar{t}' = 2.73\ \bar{h}' \qquad (4.17)$$

elde edilir. Bunlar ( 4.14) ve ( 4.15) eşitliklerinde yerlerine konursa t ve $t'$ büyüklükleri h ve $h'$ cinsinden hesaplanabilir. Böylece $\rho_o$ yoğunluklu katı yerkabuğunun toplam kalınlığı karalarda

$$T_k = T + t + h \qquad (4.18)$$

ve denizlerde

$$T_d = T - t' - h' \qquad (4.19)$$

olarak bulunur.

Pratt'ınkine göre daha akla yatkın görünen Airy varsayımı W.A.Heiskanen tarafından matematik temellere oturtulurken her kolonun yerel bir dengeye sahip olduğu kabulünden hareket edilmiştir.Bu kabul ancak bir ilk yaklaşım olarak düşünülebilir.Hollandalı bilgin F.A.Vening Meinesz doğa gerçeklerine daha uygun bir yaklaşım olan bölgesel dengeden hareket etmiştir.Böylece Şekil 4.3a'da görüldüğü gibi katı yerkabuğu ile cıvık çekirdek kabuğu arasındaki yüzey kesik çizgilerin temsil ettiği yerel denge biçiminde değil sürekli çizgilerin gösterdiği gibi bölgesel denge biçiminde olacaktır.Bölgesel Vening Meinesz sistemi olarak adlandırılan bu varsayımın matematik temelleri için Şekil 4.3b'de görüldüğü gibi bir kolon ele alınır.Standart yerkabuğu sanki gergin duran plastik bir plakaymış ve kolonun deniz seviyesi üzerindeki kitleleri bunun üzerine konan bir yükmüş gibi düşünülür.Böylesine bir durumda kolona ait kök kolonun uzantısı biçiminde olmayacak,tersine duran bir çan biçiminde oluşacaktır.Denizdeki bir kolon için bu kez antikök alttan uygulanan bir yükmüş gibi düşünülür.Burada bu sistemin ayrıntılarına girilmeyecektir.

Hangi sistem ele alınırsa alınsın,jeoidin üstündeki kitleleri traş edilmiş bir yerkabuğunun sabit kalınlık ve sabit yoğunluklu standart bir yerkabuğundan farklılıkları olduğu düşünülmektedir.Bu,Pratt-Hayford sisteminde yoğunluk,Airy-Heiskanen sisteminde kalınlık farkı olarak ele alınmaktadır.Bu nedenle jeoid dışındaki kitleler traş edilseler bile yine de jeoplar ile sferoplar eşanlamlı geometrik şekiller olmayacak dolayısiyle normallerinin doğrultuları değişecektir.İşte bu doğrultu değişimi de İZOSTATİK ÇEKÜL SAPMASI adıyla anılır.Uygulamada bunlar da jeoid yüzündeki bir nokta için hesaplanır.Bulunmasındaki düşünce zinciri aynen topoğrafik çekül sapmasında olduğu gibidir. Jeoidin bir dönel elipsoid biçiminde olduğunun varsayılabilmesi için, a)yerkabuğunun sabit kalınlıkta ve sabit yoğunlukta olduğunun, b)yeryuvarını oluşturan kitlelerden yerkabuğu altında kalanlarının bu varsayımı doğrulayan bir yoğunluk dağılımına sahip olduklarının, c)jeoidin dışında hiç bir kitlenin bulunmadığının varsayılması gerekmektedir. Bunlardan gerçek dışı sonuncu varsayımın etkisinin giderilmesiyle bile jeoidin bir dönel elipsoid biçiminde olamıyacağının gözlem ve ölçü sonuçlarıyla saptanabildiği yukarıda açıklanmıştı. Bu kez yerkabuğu altındaki kitlelerin yoğunluk dağılımlarının düzgünlüğü varsayılarak jeoid dışındaki kitleleri traş edilmiş yerkabuğunun ya sabit yoğunluktan(Pratt Hayford sistemi) ya da sabit kalınlıktan(Airy-Heiskanen sistemi) farklılıklarının ortaya çıkaracağı jeoidin $n_{izo}$ normalinin doğrultusu ile referans elipsoidin n normalinin doğrultusunun farkı olan açı, daha doğrusu bu açının bileşenleri hesaplanacaktır. Bunun için ( 3.11) eşitliklerinde

$$\begin{Bmatrix} d\eta \\ d\xi \end{Bmatrix}_{top} \quad \text{yerine} \quad \begin{Bmatrix} d\eta \\ d\xi \end{Bmatrix}_{izo} \quad \text{ve}$$

a)Pratt-Hayford sistemi uygulanacaksa

- karaya ait bir kolonun deniz seviyesiyle denge yüzeyi arasındaki her hangi bir hacim elemanı için $\rho$ yerine ( 4.8 ) eşitliğindeki $\Delta\rho$ ,
- denize ait bir kolonun deniz dibiyle denge yüzeyi arasındaki her hangi bir hacim elemanı için $\rho$ yerine ( 4.9 ) eşitliğindeki $\Delta\rho'$ ve ayrıca deniz seviyesiyle deniz dibi arasındaki her hangi bir hacim elemanı için $\rho$ yerine $\Delta\rho_w = \rho_w - \rho_o$ ,

b)Airy-Heiskanen sistemi uygulanacaksa

- karaya ait bir kolonun kök parçasındaki her hangi bir hacim elemanı için $\rho$ yerine $\Delta\rho_1 = \rho_o - \rho_1$ ,
- denize ait bir kolonun antikök parçasındaki her hangi bir hacim elemanı için $\rho$ yerine $\Delta\rho'_1 = \rho_1 - \rho_o$ ve ayrıca deniz seviyesiyle deniz dibi arasındaki her hangi bir hacim elemanı için $\rho$ yerine $\Delta\rho_w = \rho_w - \rho_o$ konur. Paydadaki gravite $g$ için ( 3.11) eşitliğinde yapıldığı gibi ortalama bir G değeri alınır, önce kolonların gerekli parçaları sonra da karalar ve denizler için ayrı ayrı integraller alınırsa

Pratt-Hayford sistemiyle

$$\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\end{Bmatrix}_{izo} = -\frac{k}{G}\left\{\iint\limits_{\substack{C\\ kara}}\left[\int_{-D}^{0}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right]\cdot d\sigma\right.$$

$$+\iint\limits_{\substack{C\\ deniz}}\left[\int_{-h'}^{0}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho_w\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right.$$

$$\left.\left.+\int_{-D}^{-h'}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho'\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right]\cdot d\sigma\right\} \quad (4.20)$$

ya da Airy-Heiskanen sistemiyle

$$\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\end{Bmatrix}_{izo} = -\frac{k}{G}\left\{\iint\limits_{\substack{C\\ kara}}\left[\int_{-(T+t)}^{-T}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho_1\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right]\cdot d\sigma\right.$$

$$+\iint\limits_{\substack{C\\ deniz}}\left[\int_{-h'}^{0}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho_w\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right.$$

$$\left.\left.-\int_{-T}^{-(T-t')}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho_1\cdot(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right]\cdot d\sigma\right\} \quad (4.21)$$

bulunur. Gerek Pratt-Hayford gerekse Airy-Heiskanen sistemiyle bulunan formüllerdeki

$$-\frac{k}{G}\iint\limits_{\substack{C\\ deniz}}\left[\int_{-h'}^{0}\frac{r}{\ell^3}\cdot\Delta\rho_w(M+z)(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]\cdot d\sigma \quad (4.22)$$

terimi jeoid dışındaki kitlelere ait topoğrafik çekül sapmalarıyla aynı paralelde bir fiziksel yoruma uygundur. Nasıl ki jeoidin dışıdaki kitleler görünen bir gerçekse suyun yoğunluğunun kara yoğunluğundan farklılığı da açık bir gerçektir. Bu nedenle yukarılarda sık sık geçen "jeoidin dışındaki kitleler olmasaydı" ifadesine "ve denizlerle karaların yoğunlukları birbirine eşit olsaydı" ifadesi eklenebilir. Böylece ( 4.22) ifadesi izostatikten çıkartılıp topoğrafik çekül sapmasına eklenebilir.

## 5 - Topoğrafik - İzostatik Çekül Sapması ve İlişkin İntegral Formülleri:

Jeoidin bir dönel elipsoid varsayılabilmesi için öne sürülen koşullardan yalnızca yerkabuğunun altındaki kitlelerin yoğunluk dağılımlarına ilişkin varsayım kabullenilirse, jeoid ile referans elipsoidin normalleri arasındaki açı topoğrafik ve izostatik çekül sapmalarının toplamı olacaktır. Matematik anlamda da bu, yukarıda verilen formüllerin toplanmasıyla elde edilir. Bu yolla bulunan çekül sapmalarına da TOPOĞRAFİK-İZOSTATİK ÇEKÜL SAPMASI denir.

Jeoid üzerindeki bir P noktasına ait topoğrafik-izostatik çekül sapması önce

$$\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\end{Bmatrix}_{top-izo} = \begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix} \qquad (5.1)$$

biçiminde ikiye ve sonra bunlar da ayrı ayrı tekrar

$$\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix}_{deniz} + \begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix}_{kara} \qquad (5.2)$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix}_{deniz} + \begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix}_{kara} \qquad (5.3)$$

olarak ikiye ayrılabilirler. Burada

$$\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix}_{deniz} = -\frac{k}{G}\cdot(\rho_W-\rho_0)\iint\limits_{C_{deniz}}\left[\int_{-K}^{0}\frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz\right]\cdot dC \qquad (5.4)$$

ile belirlidir. ( 5.2 ) ve ( 5.3 ) eşitliklerinin sağ tarafındaki diğer terimler benimsenecek izostasi sistemine göre değişik olacaklardır. Eğer Pratt-Hayford sistemi benimsenecek olursa

$$\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G}\cdot\rho_o\cdot\iint\limits_{\sigma_{kara}}\frac{\bar{D}}{D+\bar{h}}\left[\int_0^h\frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]d\sigma \qquad (5.5)$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix}_{deniz} = \frac{k}{G}\cdot\Delta\rho_w\cdot\iint\limits_{\sigma_{deniz}}\frac{\bar{H}}{D-\bar{h}}\left[\int_{-D}^{-h}\frac{r}{\ell^3}(M+z)(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]d\sigma \qquad (5.6)$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix}_{kara} = \frac{k}{G}\cdot\rho_o\cdot\iint\limits_{\sigma_{kara}}\frac{\bar{h}}{\bar{D}+\bar{h}}\left[\int_{-D}^{0}\frac{r}{\ell^3}(M+z)(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]d\sigma \qquad (5.7)$$

ile ve eğer Airy-Heiskanen sistemi benimsenecek olursa

$$\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \xi_1\end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G}\cdot\rho_o\cdot\iint\limits_{\sigma_{kara}}\left[\int_0^h\frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]d\sigma \qquad (5.8)$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix}_{deniz} = +\frac{k}{G}\cdot\Delta\rho_1\cdot\iint\limits_{\sigma_{deniz}}\left[\int_{-T}^{-(T-t)}\frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]d\sigma \qquad (5.9)$$

$$\begin{Bmatrix}\eta_2\\ \xi_2\end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G}\cdot\Delta\rho_1\cdot\iint\limits_{\sigma_{kara}}\left[\int_{-(T+t)}^{-T}\frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}dz\right]d\sigma \qquad (5.10)$$

ile belirlidirler. Bu eşitlikler, Pratt-Hayford sistemi benimsenerek;

a) karalarda deniz seviyesinin üstündeki $\rho$ yoğunluklu kitleler alınırsa ve yoğunluğu $\rho_w$ olan denizler $\rho_o$ yoğunluğuna gelecek şekilde doldurulursa,

b) karalarda deniz seviyesinin üstünden alınan kitleler hemen altlarındaki deniz seviyesiyle denge yüzeyi arasına orada da yoğunluk $\rho_c$ olacak şekilde sıkıştırılırsa ve denizleri doldurmak için gerekli olan kitleler hemen altlarında deniz dibiyle denge yüzeyi arasındaki $\rho'$ yoğunluklu kitleler $\rho_0$ yoğunluğuna gelecek şekilde gevşetilerek elde edilirse,

c)denge yüzeyi altındaki kitleler eşpotansiyelli yüzeyleri birer dönel elipsoid biçiminde oluşturulacak yoğunluk dağılımına sahip iseler,

ya da Airy-Heiskanen sistemi benimsenerek;

a)karalarda deniz seviyesinin üstündeki $\rho_0$ yoğunluklu kitleler alınırsa ve yoğunluğu $\rho_W$ olan denizler $\rho_0$ yoğunluğuna gelecek şekilde doldurulursa,

b)karalarda deniz seviyesinin üstünden alınan kitleler hemen altlarındaki $\rho_0$ yoğunluklu köklere sıkıştırılarak bunların yoğunlukları $\rho_1$ yapılırsa ve denizleri doldurmak için gerekli olan kitleler hemen altlarındaki $\rho_1$ yoğunluklu antiköklerin yoğunluğu $\rho_0$ olacak şekilde gevşetilerek elde edilirse,

c)katı yerkabuğu altındaki kitleler eşpotansiyelli yüzeyleri birer dönel elipsoid biçiminde oluşturacak yoğunluk dağılımına sahip iseler,

jeoid ortalama yer elipsoidine dönüşürdü varsayımlarına dayanır ve hem topoğrafik hem de izostatik çekül sapmalarını içerirler.

Jeodezik koordinatları $\lambda$, $\varphi$, z olan bir hacim elemanın koordinatları $\lambda_0$, $\varphi_0$, $h_0$ olan bir P noktasındaki e,m,n yerel koordinat sisteminde koordinatları

$$e = \ell \sin\alpha \sin\beta = r \sin\alpha = (N+z)\cos\varphi \sin\Delta\lambda \qquad (5.11)$$

$$m = \ell \cos\alpha \sin\beta = r \cos\alpha = (N+z)[\sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos\Delta\lambda] - e^2 \cos\varphi_0 [N \sin\varphi - N_0 \sin\varphi_0] \qquad (5.12)$$

$$n = \ell \cos\beta = \ell \cos\beta = (N+z)[\sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda] - e^2 \sin\varphi_0 [N \sin\varphi - N_0 \sin\varphi_0] - (N_0+h_0) \qquad (5.13)$$

eşitlikleri ile belirlidir. Burada geçen $\Delta\lambda$ ve $N_o$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o \quad ,$$

$$N_o = a/(1 - e^2 \sin^2\varphi_o)^{1/2}$$

olarak konmalıdır; $r$ , $\ell$ , $\sin\alpha$ , $\cos\alpha$ ise

$$r = (e^2 + m^2)^{1/2} \tag{5.14}$$

$$\ell^3 = (r^2 + n^2)^{3/2} \tag{5.15}$$

$$\sin\alpha = e/r \tag{5.16}$$

$$\cos\alpha = m/r \tag{5.17}$$

olarak ( 5.11) ve ( 5.12) eşitliklerinden kolayca bulunur. Bunlar jeodezik koordinatlar cinsinden elde edilip yüzey elemanı $d\sigma = \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$ ile birlikte yukarıdaki eşitliklerde yerlerine konursa ilişkin integral formülleri açık bir biçimde tanımlanmış olurlar. Söz konusu P noktası jeoid üstünde alınacağından $h_o$ yerine de P noktasının jeoid yüksekliğini koymak yeterli olur.

Gerek kaldırılan gerekse doldurulan kitlelerin etkilerinin uzaklıkla ters orantılı oldukları formüllerde açıkça görülmektedir. Başka bir deyişle, belirli uzaklıklardan ötedeki kitleler pratik anlamda etkinliklerini yitirmektedir. Bu nedenle uygulamada çoğunlukla integraller yeryüzünün tamamı için değil de sınırlı bir uzaklığa kadar alınır. Böylesi sınırlı bir uzaklık içindeki bölgede yukarıdaki formüller için küresel yaklaşım hatta çok yakın çevre için düzlem yaklaşım bile uygulanabilir.

K ü r e s e l   Y a k l a ş ı m : Elipsoidin eğrilik yarıçapları M ve N yerine ortalama bir R ile

$$(N+z) \simeq (M+z) \simeq (R+z) \quad , \tag{5.18}$$

$$r \sin\alpha = R\,(1+\tfrac{z}{R})\cos\varphi \sin\Delta\lambda \qquad (5.19)$$

$$r \cos\alpha = R\,(1+\tfrac{z}{R})(\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda) \qquad (5.20)$$

$$\ell \cos\beta = R\big[(1+\tfrac{z}{R})(\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda) - (1+h_0/R)\big] \qquad (5.21)$$

yazılabilir. Böylece integral altındaki ifade için de

$$\frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix} \approx \frac{R^2(1+\frac{z}{R})^2}{\ell^3}\begin{Bmatrix}r\sin\alpha\\ r\cos\alpha\end{Bmatrix}, \qquad (5.22)$$

$$\ell \approx R\Big[(1+\tfrac{z}{R})^2 - 2(1+\tfrac{z}{R})(1+\tfrac{h_0}{R})(\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda) + (1+\tfrac{h_0}{R})^2\Big]^{1/2} \qquad (5.23)$$

konabilir. Ayrıca ( 4.4 ), ( 4.5 ), ( 4.6 ), ( 4.14), ( 4.15) eşitlikleri de

$$\bar{h} = h\cdot(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}) \qquad (5.24)$$

$$\bar{D} = D\cdot(1 - \frac{D}{R} + \frac{D^2}{3R^2}) \qquad (5.25)$$

$$\bar{h}' = h'\cdot(1 - \frac{h'}{R} + \frac{h'^2}{3R^2}) \qquad (5.26)$$

$$\bar{t} = t\cdot(1 - \frac{2T+t}{R} + \frac{3T^2+3Tt+t^2}{3R^2}) \qquad (5.27)$$

$$\bar{t}' = t'\cdot(1 - \frac{2T-t'}{R} + \frac{3T^2-3Tt'+t'^2}{3R^2}) \qquad (5.28)$$

olarak alınmalıdır.

D ü z l e m  Y a k l a ş ı m : ( 5.11) ve ( 5.12) eşitliklerinden

$$de = (N+z)\cdot\cos\varphi\cdot d\lambda \qquad (5.29)$$

$$dm = (M+z)\cdot d\varphi \qquad (5.30)$$

ve dolayısiyle

$$dC = \cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d\lambda = \frac{de\cdot dm}{(N+z)\cdot(M+z)} = \frac{dA}{(N+z)(M+z)} \qquad (5.31)$$

$$dA = de\cdot dm \qquad (5.32)$$

yazılabilir.( 5.31) eşitliği integrallerde yerine konur, sonra da $M = N = \infty$ alınırsa dC'nın yerini görünüm olarak dA alır ve integral altındaki ifade

$$\frac{1}{\ell^3}\begin{Bmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{Bmatrix} \quad \text{ya da} \quad \frac{1}{(e^2+m^2+n^2)^{3/2}}\begin{Bmatrix} e \\ m \end{Bmatrix} \qquad (5.33)$$

biçimine girer. Bu yaklaşımda da $\bar{h} = h$ , $\bar{D} = D$ , $\bar{h}' = h$ , $\bar{t} = t$ , $\bar{t}' = t$ olur.

Her iki yaklaşımda da h yükseklikleri ve $h'$ derinlikleri sayısal olarak deniz seviyesine göre alınırsa sonuca ait sayısal değerler daha gerçekçi olurlar. Başka bir deyişle, böylece oynanan kitleler gerçekçi yalnızca uzaklık ve doğrultular yaklaşık alınmış olunur.

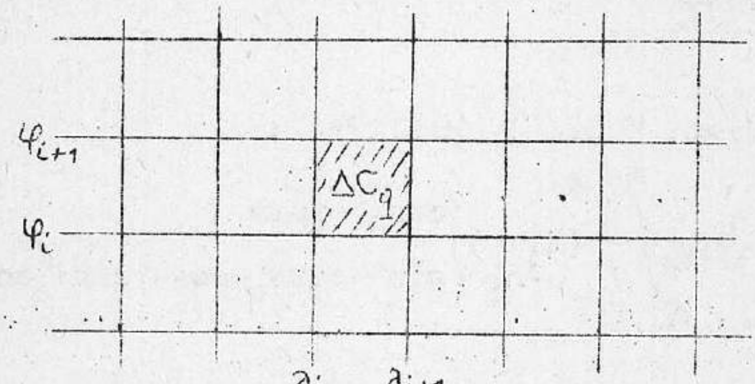
## 6 - İntegral Formüllerinin Pratik Açınımları:

Bu amaçla jeoid yüzü uygun $\Delta\sigma_q$ büyüklüğünde uzay açılarıyla sonlu bölmelere ayrılır. Her bölmede arazinin yüksekliği ya da denizin derinliği sabit kabul edilip uygun ölçekli bir yükselti haritasından ortalama $h_q$ kara yüksekliği ya da bir derinlik haritasından $h'_q$ derinliği tahmin edilir. Böylece jeoid dışındaki kitleler ve denizleri dolduran sular sonlu parçacıklara ayrılmış olur. İlişkin integral formüllerinde kendisine ait sınır değerleri ile bir sonlu parçacığın payına düşen $\Delta_q\eta$ , $\Delta_q\xi$ büyüklükleri hesaplanır. Bunların

$$\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\end{Bmatrix}_{top-izo} = \sum\left[\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_1\\ \Delta_q\xi_1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_2\\ \Delta_q\xi_2\end{Bmatrix}\right] \qquad (6.1)$$

biçiminde toplamlarının alınmasıyla sonuca ulaşılır. Sonlu parçacıkların biçimleri, seçilecek hacim elemanına bağlıdır. Pratikte koşullara bağlı olarak aşağıdaki iki yöntemden birisi uygulanır.

Iskara Yöntemi: Bu yöntem hacim elemanı Şekil 3.3'de görüldüğü gibi seçilirse uygulanır. $\Delta\sigma_q$ uzay açısı ile sınırlı, jeoid yüzündeki sonlu bölmeler ıskarayı andıran coğrafik koordinat çizgileri ile elde edilir. (Şekil 6.1). İlişkin integral formüllerinde, yüzey elemanı $d\sigma$




Şekil 6.1
Iskara yönteminde bölmeler

( 3.16) eşitliğinde verildiği gibi alınmalıdır. Böylece q indisli bir parçacık eğer kara ise $\Delta_q\eta_1$ , $\Delta_q\eta_2$ , $\Delta_q\xi_1$ , $\Delta_q\xi_2$ yalnız kara formülleriyle $h = h_q$ alınarak, eğer deniz ise bunlar yalnız deniz formülleriyle $h' = h'_q$ alınarak hesaplanır. İster kara ister deniz olsun yüzey integraline

$$\iint_{\Delta C_q} = \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \qquad (6.2)$$

olarak sınır verilir.

Küresel yaklaşım formülleri: ( 5.19), ( 5.20), ( 5.22) ve ( 5.23) eşitliklerinden

$$\int \frac{r}{\ell^3}(M+z)\cdot(N+z)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz \approx$$

$$\approx \begin{Bmatrix}\cos\varphi\sin\Delta\lambda\\ \sin\varphi\cos\varphi_0-\cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda\end{Bmatrix}\int\frac{(1+\frac{z}{R})^3}{L^3}dz \quad , \qquad (6.3)$$

$$L^2=(1+\frac{z}{R})^2-2(1+\frac{z}{R})\cdot(1+\frac{h_0}{R})\cdot(\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda)$$
$$+(1+\frac{h_0}{R})^2$$

olarak yazılır. Belirsiz integral

$$Z = \int\frac{(1+\frac{z}{R})^3}{L^3}\cdot dz \qquad (6.4)$$

ile gösterilirse, ( 5.4 ) eşitliğinden

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_1\\ \Delta_q\xi_1\end{Bmatrix}_{deniz} = -\frac{k}{G}\Delta\rho_w\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}(Z\Big|_{-h'_q}^{0})\cdot\begin{Bmatrix}\cos\varphi\cdot\sin\Delta\lambda\\ \sin\varphi\cdot\cos\varphi_0-\cos\varphi\cdot\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda\end{Bmatrix}\cdot\cos\varphi\, d\varphi d\lambda \qquad (6.5)$$

yazılır. Benimsenecek izostasi sistemine göre diğer terimler de, eğer Pratt-Hayford sistemi benimsenmiş ise ( 5.5 ), ( 5.6 ), ( 5.7 ) eşitliklerinden $\left[\bar{h}_q,\ \bar{D},\ \bar{h}'_q\right.$ ( 5.24), ( 5.25) ve ( 5.26) ile verildikleri biçimleriyle $\left.\right]$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_1\\ \Delta_q\xi_1\end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G}\rho_0\frac{\bar{D}}{\bar{D}+\bar{h}_q}\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\left(Z\Big|_0^{h_q}\right)\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d\lambda \quad (6.6)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_2\\ \Delta_q\xi_2\end{Bmatrix}_{deniz} = \frac{k}{G}\Delta\rho_w\frac{\bar{h}'_q}{\bar{D}-\bar{h}'_q}\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\left(Z\Big|_{-D}^{-h_q}\right)\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d\lambda \quad (6.7)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_2\\ \Delta_q\xi_2\end{Bmatrix}_{kara} = \frac{k}{G}\cdot\rho_0\cdot\frac{\bar{h}_q}{\bar{D}+\bar{h}_q}\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\left(Z\Big|_{-D}^{0}\right)\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d\lambda \quad (6.8)$$

ve eğer Airy-Heiskanen sistemi benimsenmiş ise ( 5.8 ), ( 5.9 ), ( 5.10) eşitliklerinden $\left[t_q\right.$ ve $t'_q$ ( 5.27), ( 5.28) yardımıyla ( 4.12) ve ( 4.13) eşitliklerinden $h_q$ ve $h'_q$ cinsinden elde edilerek $\left.\right]$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_1\\ \Delta_q\xi_1\end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G}\rho_0\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\left(Z\Big|_0^{h_q}\right)\cdot\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi\, d\lambda \quad (6.9)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_2\\ \Delta_q\xi_2\end{Bmatrix}_{deniz} = +\frac{k}{G}\Delta\rho_1\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\left(Z\Big|_{-T}^{-(T-t_q)}\right)\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d\lambda \quad (6.10)$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_2\\ \Delta_q\xi_2\end{Bmatrix}_{deniz} = -\frac{k}{G}\Delta\rho_1\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\left(Z\Big|_{-(T+t_q)}^{-T}\right)\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda \quad (6.11)$$

olarak yazılır. Bu eşitliklerdeki S ve C

$$\begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\cos\varphi\sin\Delta\lambda\\ \sin\varphi\cos\varphi_0-\cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda\end{Bmatrix}$$

anlamına kullanılmıştır.

Düzlem yaklaşım formülleri : Bu yaklaşımda düzlem kabul edilen jeoidin yüzünde bölmeler coğrafik koordinat çizgileriyle değil bir x,y dik koordinat sisteminin koordinat çizgileriyle elde edilir. Bu kez yüzey elemanı
$dA = dx \cdot dy$ ile

$$\iint_{\Delta A_q} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \qquad (6.12)$$

olur. P noktasının koordinatları $x'$, $y'$, $z' = h_o = 0$ ve hacim elemanının koordinatları $x$, $y$, $z$ ile

$$r \sin\alpha = x - x' = \Delta x \qquad (6.13)$$

$$r \cos\alpha = y - y' = \Delta y \qquad (6.14)$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad (6.15)$$

$$\ell^2 = r^2 + z^2 \qquad (6.16)$$

olur. Böylece

$$\int \frac{1}{\ell^3} \begin{Bmatrix} r \sin\alpha \\ r \cos\alpha \end{Bmatrix} \cdot dz = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} \int \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} \frac{z}{r^2 \cdot \ell} \qquad (6.17)$$

bulunur. ( 5.4 ) eşitliğinden $\bar{h}'_q = h'_q$ ile

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 1 \\ \Delta_q \xi 1 \end{Bmatrix}_{deniz} = - \frac{k}{G} \cdot \Delta\rho_W \cdot h'_q \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2 (r^2 + h'^2_q)^{1/2}} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy \cdot dx \qquad (6.18)$$

olur. Benimsenecek izostasi sistemine göre diğer terimler de, eğer Pratt-Hayford sistemi benimsenmiş ise ( 5.5 ), ( 5.6 ) ve ( 5.7 ) eşitliklerinden $\left[ \bar{h}_q = h_q \right.$ , $\bar{D} = D$ ve $\left. \bar{h}'_q = h'_q \right.$ ile$\left.\right]$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 1 \\ \Delta_q \xi 1 \end{Bmatrix}_{kara} = - \frac{k}{G} \cdot \rho_o \frac{D}{D+h_q} \cdot h_q \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2 (r^2 + h_q^2)^{1/2}} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy\, dx \qquad (6.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta_2 \\ \Delta_q \xi_2 \end{Bmatrix}_{deniz} = \frac{k}{G} \Delta\rho_w \cdot \frac{h'_q}{D-h'_q} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{D}{(r^2+D^2)^{1/2}} - \frac{h_q}{(r^2+h_q^2)^{1/2}} \right] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy \cdot dx \qquad (6.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta_2 \\ \Delta_q \xi_2 \end{Bmatrix}_{kara} = \frac{k}{G} \rho_0 \frac{h_q}{D+h_q} \cdot D \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2 (r^2+D^2)^{1/2}} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy \cdot dx \qquad (6.21)$$

ve Airy-Heiskanen sistemi benimsenmiş ise ( 5.8 ),( 5.9 ) ve ( 5.10) eşitliklerinden [ $t_q$ ve $t'_q$ , $\bar{h}_q = h_q$ , $\bar{h}'_q = h'_q$ ile (4.12),( 4.13) eşitliklerinden elde edilerek ]

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta_1 \\ \Delta_q \xi_1 \end{Bmatrix}_{kara} = - \frac{k}{G} \rho_0 h_q \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2 (r^2+h_q^2)^{1/2}} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy \cdot dx \qquad (6.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta_2 \\ \Delta_q \xi_2 \end{Bmatrix}_{deniz} = + \frac{k}{G} \Delta\rho_1 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{T}{(r^2+T^2)^{1/2}} - \frac{T-t'_q}{\left[r^2+(T-t'_q)^2\right]^{1/2}} \right] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy \cdot dx \qquad (6.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta_2 \\ \Delta_q \xi_2 \end{Bmatrix}_{kara} = - \frac{k}{G} \Delta\rho_1 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{T+t_q}{\left[r^2+(T+t_q)^2\right]^{1/2}} - \frac{T}{(r^2+T^2)^{1/2}} \right] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} dy \cdot dx \qquad (6.24)$$

olarak yazılırlar.

K a l ı p Y ö n t e m i : Bu yöntem küresel ya da düzlem yaklaşımlar'da uygulanır. Hacim elemanının biçimi Şekil 6.2 de görüldüğü gibidir. $\Delta C_q$ uzay açısıyla sınırlı jeoid yüzündeki sonlu bölmeler Şekil 6.3'de görülen gibi bir kalıp yardımıyla elde edilir. Saydam bir altlığa çizilen kalıbın orta noktası harita üzerinde P noktasına konur ve y ekseni kuzeye yöneltilir. Böylece haritadan bir $\Delta C_q$ bölmesi için ortalama $h_q$ arazi yüksekliği ya da $h'_q$ deniz derinliği tahmin edilir. Kalıp hazırlanırken uygun yarıçaplı dairelerle kuşaklar ve uygun azimutlu doğrularla da dilimler oluşturulur. Sonlu $\Delta C_q$ bölmeleri bir kuşak ile bir dilimin ortak kısmıdırlar. Şekil 6.3 de görüldüğü gibi her kuşak için gerekirse ayrı sayıda dilim oluşturulabilir.

Küresel yaklaşım formülleri: P noktasına göre hacim elemanının koordinatları $\psi$, $\alpha$, z alınır. Buradaki $\psi$ hacim elemanının P'ye olan küresel uzaklığıdır. P noktasının küredeki izdüşümü Q, hacim elemanının'ki Q' ve kuzey kutup noktası Şekil 6.4'de görülen küresel üçgeni oluşturur. Ayrıca Şekil 6.5 P noktası ile hacim elemanını içeren düşey düzlemi göstermektedir. Anılan şekillerden ve ( 5.19), ( 5.20) ve ( 5.21) eşitliklerinden

$$e = \ell \sin\alpha \sin\beta = r \sin\alpha = R\left(1+\frac{z}{R}\right) \sin\psi \sin\alpha \qquad (6.25)$$

$$n = \ell \cos\alpha \sin\beta = r \cos\alpha = R\left(1+\frac{z}{R}\right) \sin\psi \cos\alpha \qquad (6.26)$$

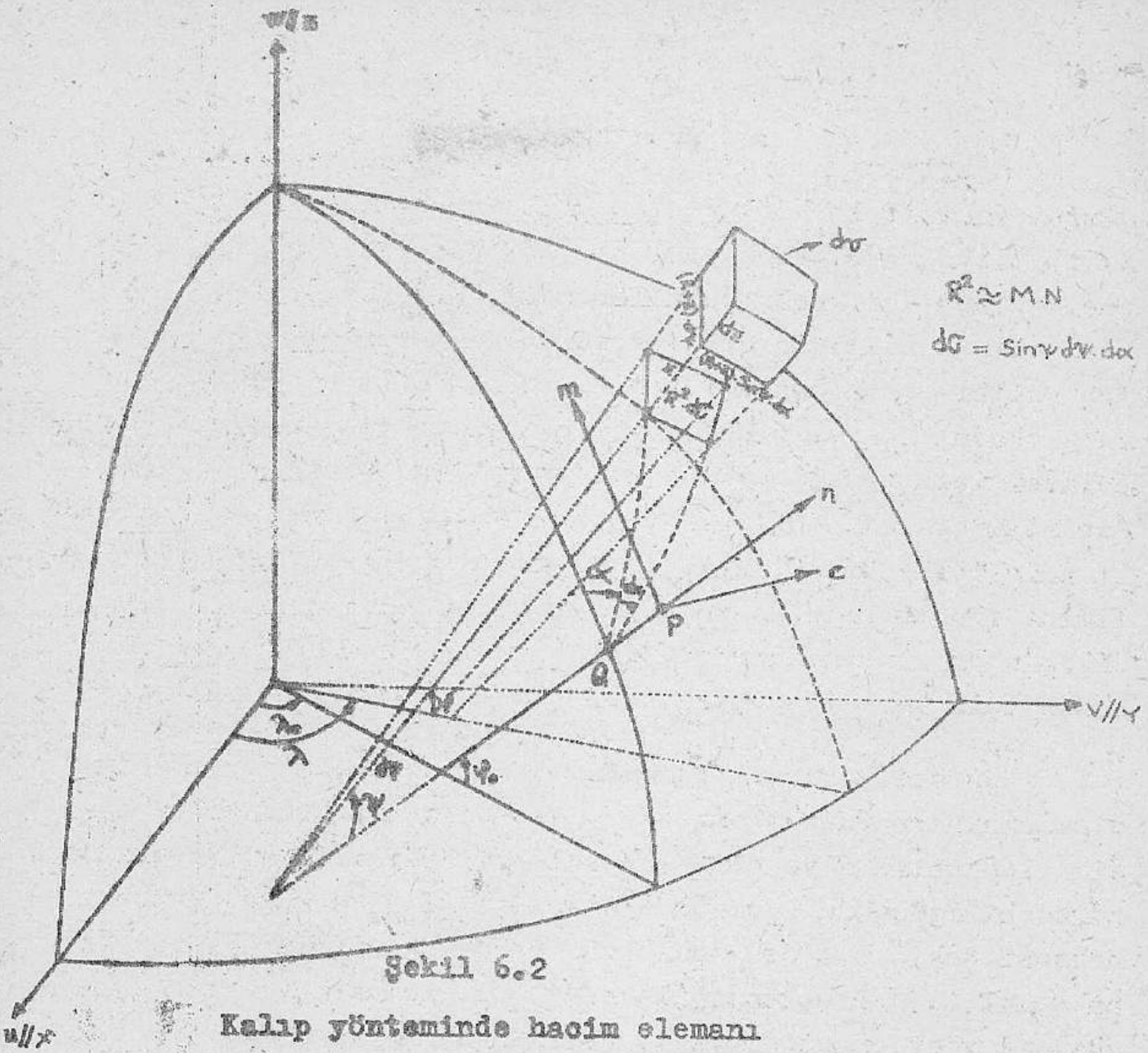
$$n = \ell \cos\beta = \ell \cos\beta = R\left[\left(1+\frac{z}{R}\right) \cos\psi - (1+h_o/R)\right] \qquad (6.27)$$

yazılabilir. İlişkin integral formüllerinde yüzey elemanı dC

$$dC = \sin\psi \cdot d\psi \cdot d\alpha \qquad (6.28)$$

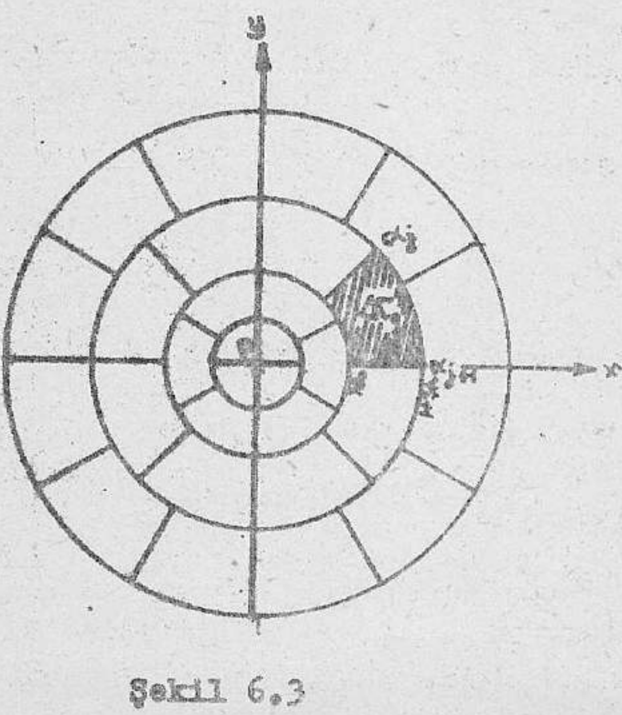
olarak alınmalıdır. Böylece

$$\iint_{\Delta C_q} = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \qquad (6.29)$$



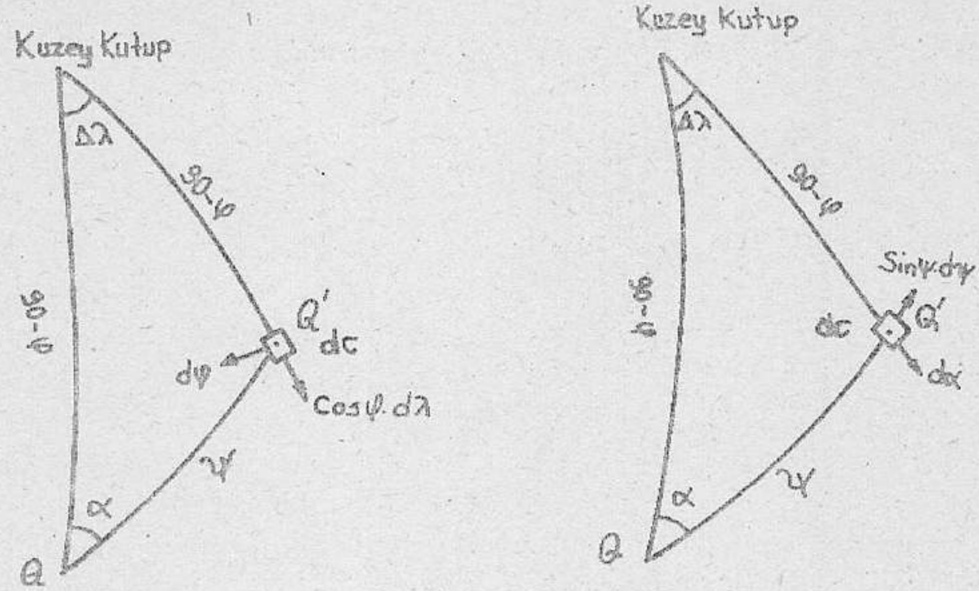

Şekil 6.2

Kalıp yönteminde hacim elemanı



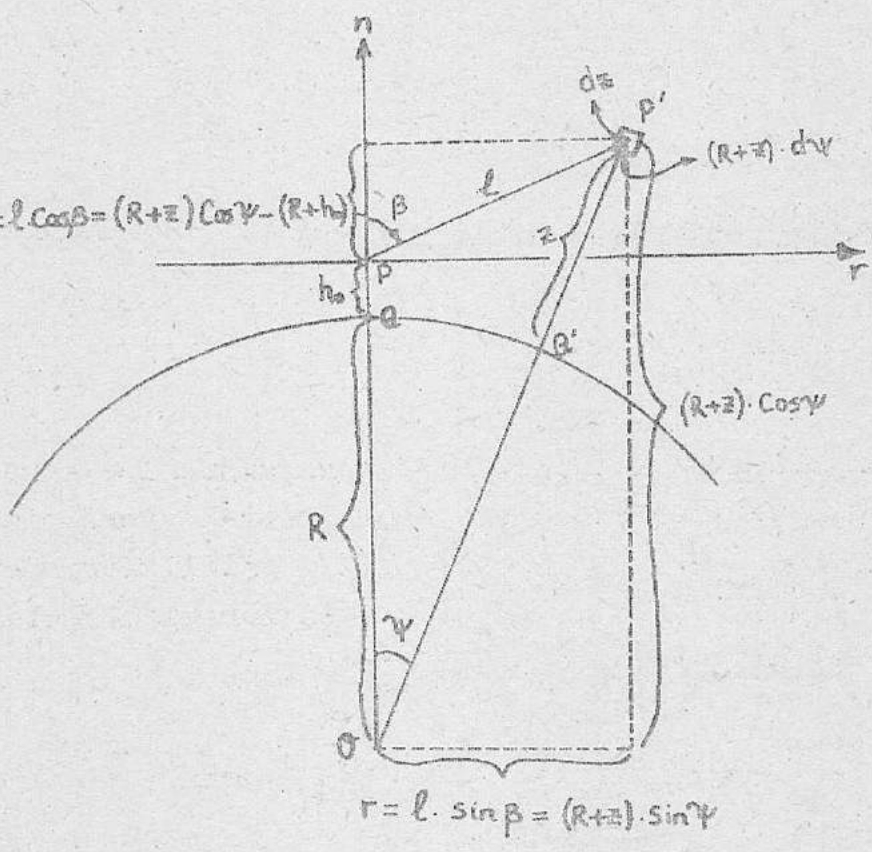

Şekil 6.3

Kalıp yönteminde bölmeler




Şekil 6.4

Birim kürede küresel üçgenin elemanları ve yüzey elemanı




Şekil 6.5

Küresel kutupsal,yerel kutupsal ve yerel dik koordinatlar arasındaki ilişkiler olur. Iskara yöntemindeki ( 6.3 ) eşitliği

$$\int \frac{r}{\ell^3}(M+z)(N+z)\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix}\cdot dz \approx \begin{Bmatrix}S\\ C\end{Bmatrix}\cdot\int\frac{dz}{L^3} \qquad (6.30)$$

biçiminde yazılır ve bu kez

$$S = \sin\Psi \sin\alpha$$

$$C = \sin^2\Psi \cos\alpha$$

$$L^2 = (1+\frac{z}{R})^2 - 2(1+\frac{z}{R})(1+\frac{h_o}{R})\cos\Psi + (1+h_o/R)^2$$

olarak tanımlanır. Belirsiz integral yine

$$Z = \int\frac{dz}{L^3} \qquad (6.31)$$

ile gösterilerek ( 5.4 ) eşitliğinden

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_1\\ \Delta_q\xi_1\end{Bmatrix}_{deniz} = -\frac{k}{G}\Delta\rho_w\begin{Bmatrix}C(\alpha)\\ S(\alpha)\end{Bmatrix}\int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}}(Z\Big|_{-h_q}^{0})\sin^2\psi\cdot d\psi \qquad (6.32)$$

yazılır. Bu eşitlikte geçen $C(\alpha)$ ve $S(\alpha)$ büyüklükleri de

$$C(\alpha) = \cos\alpha_j - \cos\alpha_{j+1}$$

$$S(\alpha) = \sin\alpha_{j+1} - \sin\alpha_j$$

ile belirlidirler. Benimsenecek izostasi sistemine göre bulunacak diğer terimlere gelince, eğer Pratt-Hayford sistemi benimsenmiş ise ( 5.5 ), ( 5.6 ), ( 5.7 ) eşitliklerinden [$\bar{h}_q, \bar{D}, \bar{h}_q$; ( 5.24), ( 5.25), ( 5.26) eşitlikleriyle verildikleri biçimde olmak üzere]

$$\begin{Bmatrix}\Delta_q\eta_1\\ \Delta_q\xi_1\end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G}\cdot\rho_0\cdot\frac{\bar{D}}{\bar{D}+\bar{h}_q}\cdot\begin{Bmatrix}C(\alpha)\\ S(\alpha)\end{Bmatrix}\int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}}(Z\Big|_{0}^{-h_q})\sin^2\psi\cdot d\psi \qquad (6.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{deniz} = \frac{k}{G} \cdot \Delta \rho_w \cdot \frac{\bar{h}'_q}{\bar{D}-\bar{h}'_q} \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} (Z \Big|_{-D}^{-h'_q}) \sin^2\psi \cdot d\psi \qquad (6.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{kara} = \frac{k}{G} \cdot \rho_o \cdot \frac{\bar{h}_q}{\bar{D}+\bar{h}_q} \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} (Z \Big|_{-D}^{0}) \sin^2\psi \cdot d\psi \qquad (6.35)$$

eğer Airy-Heiskanen sistemi benimsenecek olursa ( 5.8 ), ( 5.9 ) ve ( 5.10) eşitliklerinden $t_q$ ve $t'_q$ ; ( 5.27), ( 5.28) ve ( 5.29) eşitlikleriyle $h_q$ ve $h'_q$ cinsinden bulunarak

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 1 \\ \Delta_q \xi 1 \end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G} \cdot \rho_o \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} (Z \Big|_{0}^{h_q}) \sin^2\psi \cdot d\psi \qquad (6.36)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{deniz} = +\frac{k}{G} \cdot \Delta \rho_1 \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} (Z \Big|_{-T}^{-(T-t_q)}) \sin^2\psi \cdot d\psi \qquad (6.37)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G} \Delta \rho_1 \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} (Z \Big|_{-(T+t_q)}^{-T}) \sin^2\psi \, d\psi \qquad (6.38)$$

yazılır.

Düzlem yaklaşım formülleri: Hacim elemanının koordinatları bu kez $r$, $\alpha$, $z$ alınır. Ayrıca integral formüllerinde yüzey elemanı dA

$$dA = r \cdot dr \cdot d\alpha \qquad (6.39)$$

olup

$$\iint_{\Delta A_q} = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \qquad (6.40)$$

alınır. Iskara yöntemindeki ( 6.17) eşitliği ise

$$\int \frac{1}{\ell^3} \begin{Bmatrix} r \sin\alpha \\ r \cos\alpha \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} r \cdot \sin\alpha \\ r \cdot \cos\alpha \end{Bmatrix} \int \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} \cdot \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} \qquad (6.41)$$

biçimine girer. Böylece ( 5.4 ) eşitliğinden

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 1 \\ \Delta_q \xi 1 \end{Bmatrix}_{deniz} = -\frac{k}{G} \Delta\rho_w \cdot h'_q \cdot \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{(r^2+h_q^2)^{1/2}} \qquad (6.42)$$

olup, Pratt-Hayford sistemi benimsenecek olursa

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 1 \\ \Delta_q \xi 1 \end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G} \cdot \rho_0 \cdot \frac{D}{D+h_q} \cdot h_q \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \cdot \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{(r^2+h_q^2)^{1/2}} \qquad (6.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{deniz} = \frac{k}{G} \Delta\rho_w \cdot \frac{h'_q}{D-h'_q} \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[ \frac{D}{(r^2+D^2)^{1/2}} - \frac{h'_q}{(r^2+h'^2_q)^{1/2}} \right] dr \qquad (6.44)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{kara} = \frac{k}{G} \cdot \rho_0 \cdot \frac{h_q}{D+h_q} \cdot D \cdot \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{(r^2+D^2)^{1/2}} \qquad (6.45)$$

ve eğer Airy-Heiskanen sistemi benimsenecek olursa

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 1 \\ \Delta_q \xi 1 \end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G} \cdot \rho_0 \cdot t_q \cdot \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{(r^2+t_q^2)^{1/2}} \qquad (6.46)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{deniz} = +\frac{k}{G} \Delta\rho_1 \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[ \frac{T}{(r^2+T^2)^{1/2}} - \frac{T-t_q}{\left[r^2+(T-t_q)^2\right]^{1/2}} \right] dr \qquad (6.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_q \eta 2 \\ \Delta_q \xi 2 \end{Bmatrix}_{kara} = -\frac{k}{G} \Delta\rho_1 \begin{Bmatrix} C(\alpha) \\ S(\alpha) \end{Bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[ \frac{T+t_q}{\left[r^2+(T+t_q)^2\right]^{1/2}} - \frac{T}{(r^2+T^2)^{1/2}} \right] dr \qquad (6.48)$$

yazılır. Yukarıdaki sonlu integraller

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \ln \frac{r_{i+1}+(r_{i+1}^2+z^2)^{1/2}}{r_i+(r_i^2+z^2)^{1/2}} \qquad (6.49)$$

eşitliği ile kolayca bulunur.

K A Y N A K L A R :


BAESCHLIN, C.F.(1948): Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli Verlag, Zürich

BOMFORD, G.(1971): Geodesy. Oxford University Press.

GORDON, R.B.(1972): Physics of the Earth. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

HEISKANEN, W.A.-F.A. VENING MEINESZ: The Earth and Its Gravity Field. MacGraw-Hill, New York 1958

HEISKANEN, W.A.-H.MORITZ(1967): Physical Geodesy. Freeman and Company. San Francisco and London

HEITZ, S.(1966): Formeln zur Berechnung topographisch-isostatischer Reduktionen von Lotabweichungen auf der Grundlage geographischer Koordinaten. DGK, Reihe A, No 47

HEITZ, S.(1968): Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen. DGK, Reihe C, No 124

HELMERT, F.R.(1880): Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962)

JORDAN/EGGERT/KNEISSL(1969): Handbuch der Vermessungskunde, Band V. [K. LEDERSTEGER: Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung). Metzlersche Buchhandlung, Stuttgart]

KAULA, W.A.(1966): Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Publishing Co., London

KLERER, M.-F. GROSSMAN(1971): A New Table of Indefinit Integrals(Computer processed). Dover Pub., New York

MacDONALD, G.J.F.(1964): The Figur and Long-term Mechanical Properties of the Earth. Contribution to the International Conferense on the Earth Sciences. M.I.T., September 1964

MUELLER,I.I.(1964): Introduction to Satellite Geodesy. Frederick Ungar Publishing Co.,New York

MUELLER,I.I.-J.D.ROCKIE(1966): Gravimetric and Celestial Geodesy,A Glossary of Terms.Frederick Ungar Publishing Co.,New York

MUELLER,I.I.(1969): Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy.Frederick Ungar Publishing Co., New York

PICK,M.-J.PICHA-V.VYSKOCIL(1973): Theory of the Earth's Gravity Field.Elsevier Scientific Pub.Co.,Amsterdam

SAZHINA,N.-N.GRUSHINSKY(1971): Gravity Prospecting.Mir Publishers.Moscow

VENING MEINESZ,F.A.(1964): The Earth's Crust and Mantle. Developments in Solid Earth Geophysics 1.Elsevier Publishing Co.,Amsterdam